Prof. TeknD Timo Weidl
Jan Köllner, M.Sc.
Simon Barth, M.Sc., Andreas Bitter, M.Sc.
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Analysis 2 (SS 2019) — Blatt 10

Повторение — мать учения

Aufgaben zur Abgabe am 21. Juni in den Übungen

10.1. **(a)** Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

$$\textbf{(i)} \lim_{y\to 0} \int_y^{1+y} \frac{1}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x \qquad \textbf{(ii)} \lim_{y\to 0} \int_0^1 xy^{-2}e^{-x^2y^{-2}}\,\mathrm{d}x$$

(b) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion

$$f(\alpha) = \int_0^{\alpha^2} \left(\int_{x-\alpha}^{x+\alpha} \sin(x^2+y^2-\alpha^2)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

10.2. Gegeben seien die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ komplexer Zahlen, so dass die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergieren. Wir definieren für $x \in \mathbb{R}$ die Funktionen

$$C(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) \qquad \text{und} \qquad S(x) := \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx).$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktionen C und S stetig sind und geben Sie eine (nichttriviale) Bedingung an die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ an, so dass C und S differenzierbar sind.

(b) Zeigen Sie:

$$\textbf{(i)}\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} C(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \quad \textbf{(ii)}\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} S(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x \quad \textbf{(iii)} \int_0^{2\pi} S(x)C(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

10.3. **(a)** Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f_1(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}, & (x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

im Nullpunkt unstetig ist, jedoch die Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f_1(x,y)\right) \qquad \text{und} \qquad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f_1(x,y)\right)$$

existieren und mit $f_1(0,0)$ übereinstimmen.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f_2(x,y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

längs jeder Geraden stetig ist, d.h. wenn man den Definitionsbereich von f_2 auf eine beliebige Gerade in der Ebene einschränkt, dann ist diese Funktion stetig. Zeigen Sie außerdem, dass f_2 nicht stetig ist.

Votieraufgaben
(Die folgenden Aufgaben dienen als Wiederholung des bisher behandelten Stoffes)

10.4. Berechnen Sie den folgenden Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt[n]{e^{-k}}.$$

10.5. Sei $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine monoton fallende Funktion mit $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Zeigen Sie, dass das folgende uneigentliche Integral konvergiert

$$\int_0^\infty \sin(x) f(x) \, \mathrm{d}x.$$

10.6. Gegeben sei die Kurve Γ durch die Menge

$$M_\Gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1, \ x + z = 1\}.$$

Geben Sie eine Parametrisierung von Γ an und bestimmen Sie eine Darstellung bezüglich der Bogenlänge. Bestimmen Sie weiterhin in jedem Kurvenpunkt den Tangentialvektor.

10.7. Bestimmen Sie eine Näherung des Integrals

$$\int_0^1 \frac{e^x \cos(x)}{1+x^2} \, \mathrm{d}x$$

unter Verwendung der Trapezregel bzw. Simpsonregel zur Schrittweite $\frac{1}{4}$. Für welche Schrittweite $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ in der Trapezregel ist der relative Fehler kleiner als 10^{-4}?

10.8. **(a)** Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

$$\textbf{(i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n!} \quad \textbf{(ii)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5n + (-1)^n} \quad \textbf{(iii)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+(-1)^n} \quad \textbf{(iv)} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+k}$$

(b) Zeigen Sie, dass die folgenden Reihen konvergieren und bestimmen Sie jeweils ihren Wert.

$$\textbf{(i)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} \qquad \textbf{(ii)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{12^n}$$

$$\textbf{(iii)} \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - m^2} \qquad \textbf{(iv)} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)x^n, \ x \in (0,1)$$

10.9. **(a)** Untersuchen Sie die Funktionenfolgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gegeben durch

$$\begin{aligned} f_n &: [0,\infty) \to \mathbb{R}, \ f_n(x) := \frac{1}{1+nx}, \\ g_n &: [0,\infty) \to \mathbb{R}, \ g_n(x) := x f_n(x), \\ h_n &: [0,\infty) \to \mathbb{R}, \ h_n(x) := g_n(nx), \end{aligned}$$

auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

(b) Sei für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Polynom. Konvergiere weiterhin die Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen eine Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Grenzfunktion p ebenfalls ein Polynom ist.

© weidl@mathematik.uni-stuttgart.de jan.koellner@mathematik.uni-stuttgart.de
simon.barth@mathematik.uni-stuttgart.de andreas.bitter@mathematik.uni-stuttgart.de