Analysis 2 (SS 2019) — Blatt 11

Man sieht oft etwas hundert Mal, tausend Mal, ehe man es zum allerersten Mal wirklich sieht.
(Christian Morgenstern)

Aufgaben zur Abgabe am 27. Juni

11.1. **(a)** Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{4^n + 5^n} z^n.$$

(b) Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ folgende Identität gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+2)n!} = (x-1)\mathrm{e}^x - \frac{1}{2}x^2 + 1$$

11.2. Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergieren die folgenden Reihen?

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{(n^2)}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3\mathrm{i})^n}{n^2}$ **(c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{z^n}{k}$ **(d)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+n}{n}\right)^{n^2} z^n$

Votieraufgaben

11.3. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

(a) Zeigen Sie, dass für $b > a$ und $w \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b f(t+w)\,\mathrm{d}t = \int_{a+w}^{b+w} f(t)\,\mathrm{d}t$$

gilt.

(b) Nutzen Sie Aufgabenteil **(a)**, um die zweite Ableitung F'' der Funktion

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ F(x) = \frac{1}{h^2}\int_0^h \left(\int_0^h f(x+\xi+\nu)\,\mathrm{d}\nu\right)\mathrm{d}\xi,\ h > 0$$

zu berechnen.

11.4. Bestimmen Sie eine Potenzreihendarstellung der Funktionen

(i) $f_1(x) = \left(\dfrac{1}{1-x}\right)^2$ **(ii)** $f_2(x) = \dfrac{x}{(1-x)(1-x^2)}$ **(iii)** $f_3(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2}$

im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und geben Sie jeweils den entsprechenden Konvergenzradius an.

© weidl@mathematik.uni-stuttgart.de jan.koellner@mathematik.uni-stuttgart.de
simon.barth@mathematik.uni-stuttgart.de andreas.bitter@mathematik.uni-stuttgart.de

11.5. Gegeben sei die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ durch

$$a_0 = 0,\ a_1 = \frac{1}{6} \quad \text{und} \quad a_n = \frac{5}{6}a_{n-1} - \frac{1}{6}a_{n-2}.$$

Bestimmen Sie mit Hilfe von Potenzreihen eine explizite Darstellung für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

11.6. **(a)** Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass alle komplexen Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$\left(\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}\right)^{2n+1} = 1$$

durch $-\cot\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$, $k = 1, \dots, 2n$ gegeben sind.

(b) Zeigen Sie die Identität

$$\sum_{k=1}^{2n} \cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{2n(2n-1)}{3}.$$

(c) Zeigen Sie für alle $u \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ die Abschätzung

$$\cot^2(u) < u^{-2} < \cot^2(u) + 1.$$

(d) Folgern Sie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Zusatzaufgaben

11.7. Bestimmen Sie eine Potenzreihendarstellung der Funktion

$$f : (0,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \int_0^x \frac{y}{\ln(1+y)}\,\mathrm{d}y$$

im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

© weidl@mathematik.uni-stuttgart.de jan.koellner@mathematik.uni-stuttgart.de
simon.barth@mathematik.uni-stuttgart.de andreas.bitter@mathematik.uni-stuttgart.de