Analysis 2 (SS 2019) — Blatt 12

In the middle of the twentieth century it was attempted to divide physics and mathematics. The consequences turned out to be catastrophic. Whole generations of mathematicians grew up without knowing half of their science and, of course, in total ignorance of any other sciences. They first began teaching their ugly scholastic pseudo-mathematics to their students, then to schoolchildren (forgetting Hardys warning that ugly mathematics has no permanent place under the Sun).
(V. I. Arnold (1937-2010) in "On teaching mathematics")

Aufgaben zur Abgabe ~~am~~ ab 4. Juli in den Übungen

12.1. Seien E, F normierte lineare Vektorräume und $T \in \mathcal{L}(E, F)$ surjektiv. Angenommen es gibt ein $m > 0$ sodass

$$\|Tx\|_F \geq m\|x\|_E$$

für alle $x \in E$ gilt, so zeigen Sie, dass T invertierbar und $T^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$ ist.

12.2. Sei $\ell^\infty := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N} : \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| < \infty\}$ der Vektorraum der beschränkten Folgen reeller Zahlen. Diesen versehen wir mit der Norm

$$\|(a_n)\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$$

und betrachten den Operator

$$T : (a_1, a_2, a_3, \dots) \mapsto (a_1, a_2/2, a_3/3, \dots).$$

Zeigen Sie, dass $T \in \mathcal{L}(\ell^\infty, \ell^\infty)$ mit $\|T\|_\mathcal{L} = 1$ und T injektiv aber nicht surjektiv ist.

Votieraufgaben

12.3. Sei E ein linearer normierter vollständiger Vektorraum und $A \in \mathcal{L}(E, E)$ mit $\|A\|_\mathcal{L} < 1$. Wir betrachten

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} A^n.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Reihe tatsächlich gegen einen Operator $T \in \mathcal{L}(E, E)$ konvergiert.

(b) Zeigen Sie, dass für den Grenzwert

$$(I - A)T = T(I - A) = I$$

gilt. Hierbei bezeichne I die Identität auf E.

© weidl@mathematik.uni-stuttgart.de jan.koellner@mathematik.uni-stuttgart.de
simon.barth@mathematik.uni-stuttgart.de andreas.bitter@mathematik.uni-stuttgart.de

12.4. Sei $\ell^\infty := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N} : \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| < \infty\}$ der Vektorraum der beschränkten Folgen reeller Zahlen. Diesen versehen wir mit der Norm

$$\|(a_n)\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$$

und betrachten die beiden Operatoren

$$\begin{aligned} S &: (a_1, a_2, a_3, \dots) \mapsto (a_2, a_3, a_4, \dots) \\ D &: (a_1, a_2, a_3, \dots) \mapsto (a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \dots) \end{aligned}$$

Ist $S \in \mathcal{L}(\ell^\infty, \ell^\infty)$ bzw. $D \in \mathcal{L}(\ell^\infty, \ell^\infty)$? Falls "ja", so berechnen Sie auch die zugehörigen Operatornormen.

12.5. In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass auf $\mathbb{R}^n$ alle Normen äquivalent sind, d.h. es für zwei Normen $\|\cdot\|_A$ und $\|\cdot\|_B$ stets Konstanten $c, C > 0$ gibt, sodass

$$c\|x\|_A \le \|x\|_B \le C\|x\|_A$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt.

(a) Bezeichne $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)^{1/2}$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$, so zeigen Sie, dass

$$\|x\|_\infty \le \|x\|$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt.

(b) Sei $\|\cdot\|_A$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^n$, so zeigen Sie, dass

$$\|x\|_A \le C\|x\|_\infty \le C\|x\|$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und eine Konstante $C > 0$ gilt.
(*Hinweis:* Schreiben Sie $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$ bzgl. einer beliebigen Basis $(e_1, \dots, e_n)$ von $\mathbb{R}^n$.)

(c) Zeigen Sie, dass

$$\|\cdot\|_A : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$$

eine stetige Abbildung und

$$\mathbb{S}^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$$

kompakt ist.

(d) Nach dem Satz von Weierstrass nimmt $\|\cdot\|_A$ auf $\mathbb{S}^{n-1}$ sein Minimum und Maximum an, d.h. es gibt $m, M > 0$ sodass

$$0 < m \le \|x\|_A \le M < \infty$$

für alle $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ gilt. Folgern Sie daraus, dass

$$m\|x\| \le \|x\|_A \le M\|x\| < \infty$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt.

(e) Zeigen Sie, dass es zu zwei gegebenen Normen $\|x\|_A$ und $\|x\|_B$ auf $\mathbb{R}^n$ stets Konstanten $c, C > 0$ gibt, sodass

$$c\|x\|_A \le \|x\|_B \le C\|x\|_A$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt.

12.6. In dieser Aufgabe soll die Kettenregel für die Fréchet-Ableitung gezeigt werden. Seien dazu E, F, G normierte Räume und $f : E \to F$ differenzierbar in $x_0 \in E$ sowie $g : F \to G$ differenzierbar in $y_0 = f(x_0)$.

(a) Sei $h \in E$. Zeigen Sie, dass

$$(g \circ f)(x_0 + h) = (g \circ f)(x_0) + g'(f(x_0))(f'(x_0)h + o(h)) + o(f'(x_0)h + o(h)).$$

(b) Zeigen Sie, dass

$$g'(f(x_0))o(h) = o(h) \qquad \text{und} \qquad o(f'(x_0)h + o(h)) = o(h)$$

für $h \to 0$.

(c) Schließen Sie aus den beiden vorangegangenen Aufgabenteilen auf die Fréchet-Differenzierbarkeit von $g \circ f$ und zeigen Sie dass

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Warum darf die Reihefolge von $g'(f(x_0))$ und $f'(x_0)$ auf der rechten Seite nicht vertauscht werden?

(d) Formulieren Sie die Formel aus Teilaufgabe **(c)** im Fall $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^m$ und $G = \mathbb{R}^p$ mit Hilfe von Matrizen.