

Analysis 3  
Vorlesung im Wintersemester 2017/2018

## Übungsblatt 2

### Aufgabe 2.1 (schriftlich, 4 Punkte)

a) Berechnen Sie die folgenden Integrale

(i) Es sei

$$f(x, y) = \frac{1}{(x + y)^2}.$$

Berechnen Sie das Integral  $\int_M f(x, y) \, dx dy$ , wobei  $M$  den Normalbereich  $1 \leq x \leq 2$ ,  $x \leq y \leq 2x$  beschreibt.

(ii) Es sei  $f$  auf dem Rechteck  $R = [0, 4] \times [0, 8]$  wie folgt definiert:

$$f(x, y) = \begin{cases} y, & \text{falls } 0 \leq y \leq -2x^2 + 8x, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie das Integral  $\int_R f(x, y) \, dx dy$ .

b) Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine **quadrierbare Menge** und seien  $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrierbar. Zeigen Sie, dass dann für alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  auch die Funktionen  $\alpha f + \beta g$  Riemann-integrierbar sind und die Linearität

$$\int_M (\alpha f + \beta g)(x) \, dx = \alpha \int_M f(x) \, dx + \beta \int_M g(x) \, dx.$$

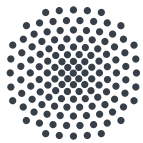
gilt.

*Anmerkung: Der Satz 1.9.a aus der Vorlesung darf verwendet werden.*

### Aufgabe 2.2 a) Berechnen Sie den Flächeninhalt von

$$G = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0, y^2 < x < 4 - y^2 \}.$$

b) Berechnen Sie das Volumen, welches durch die Ebenen  $z = x + y$ ,  $z = 6$ ,  $x = 0$  und  $y = 0$  eingeschlossen wird.



**Aufgabe 2.3** Sei  $M \subset \mathbb{R}^3$  eine quadrierbare Menge und  $\rho : M \rightarrow \mathbb{R}$  eine Massendichte, dann ist der Schwerpunkt von  $M$  definiert durch

$$S = \frac{\int_M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rho(x, y, z) \, dx dy dz}{\int_M \rho(x, y, z) \, dx dy dz}.$$

Berechnen Sie für die Massendichte  $\rho(x, y, z) = 1$  den Schwerpunkt der Pyramide

$$P = \left\{ (x, y, z)^T \mid \max(|y|, |z|) \leq \frac{ax}{2h}, 0 \leq x \leq h \right\}$$

in Abhängigkeit der Parameter  $a, h > 0$ .

**Aufgabe 2.4** Beweisen sie folgende Aussagen:

- a) Die Vereinigung und der Schnitt von endlich vielen quadrierbaren Mengen ist ebenfalls quadrierbar.
- b) Jeder Normalbereich ist quadrierbar.

**Aufgabe 2.5** Gegeben sind ein Kegel und eine Pyramide im  $\mathbb{R}^3$  mit der gleichen Höhe  $h$  und deren Grundflächen denselben Flächeninhalt  $A$  besitzen. Zeigen Sie mit dem Satz von Fubini, dass beide Körper dann auch dasselbe Volumen  $V$  besitzen.

Besprechung der Votieraufgaben in den Übungen am  
**Freitag, den 03.11.2017**.

Die schriftlichen Aufgaben werden in der darauffolgenden Übung besprochen.