Universität Stuttgart

PD Dr. Wolf-Patrick Düll
Insitut für Analysis, Dynamik
und Modellierung

Analysis 3
Vorlesung im Wintersemester 2017/2018

Übungsblatt 2

Aufgabe 2.1 (schriftlich, 4 Punkte)

a) Berechnen Sie die folgenden Integrale

(i) Es sei

$$f(x,y) = \frac{1}{(x+y)^2}.$$

Berechnen Sie das Integral $\int_M f(x,y)\,dxdy$, wobei M den Normalbereich $1 \leq x \leq 2\,,\ x \leq y \leq 2x$ beschreibt.

(ii) Es sei f auf dem Rechteck $R = [0,4] \times [0,8]$ wie folgt definiert:

$$f(x,y) = \begin{cases} y\,, & \text{falls } 0 \leq y \leq -2x^2 + 8x\,, \\ 0\,, & \text{sonst }. \end{cases}$$

Berechnen Sie das Integral $\int_R f(x,y)\,dxdy$.

b) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine **quadrierbare Menge** und seien $f, g : M \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Zeigen Sie, dass dann für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ auch die Funktionen $\alpha f + \beta g$ Riemann-integrierbar sind und die Linearität

$$\int_M (\alpha f + \beta g)(x)\,dx \ = \ \alpha \int_M f(x)\,dx + \beta \int_M g(x)\,dx.$$

gilt.

Anmerkung: Der Satz 1.9.a aus der Vorlesung darf verwendet werden.

Aufgabe 2.2 **a)** Berechnen Sie den Flächeninhalt von

$$G = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y > 0,\ y^2 < x < 4 - y^2 \right\}.$$

b) Berechnen Sie das Volumen, welches durch die Ebenen $z = x + y,\ z = 6,\ x = 0$ und $y = 0$ eingeschlossen wird.

Aufgabe 2.3 Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine quadrierbare Menge und $\rho : M \to \mathbb{R}$ eine Massendichte, dann ist der Schwerpunkt von M definiert durch

$$S = \frac{\int_M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rho(x,y,z)\, dxdydz}{\int_M \rho(x,y,z)\, dxdydz}.$$

Berechnen Sie für die Massendichte $\rho(x,y,z) = 1$ den Schwerpunkt der Pyramide

$$P = \left\{ (x,y,z)^T \,\middle|\, \max(|y|,|z|) \leq \frac{ax}{2h}, 0 \leq x \leq h \right\}$$

in Abhängigkeit der Parameter $a, h > 0$.

Aufgabe 2.4 Beweisen sie folgende Aussagen:

a) Die Vereinigung und der Schnitt von endlich vielen quadrierbaren Mengen ist ebenfalls quadrierbar.

b) Jeder Normalbereich ist quadrierbar.

Aufgabe 2.5 Gegeben sind ein Kegel und eine Pyramide im $\mathbb{R}^3$ mit der gleichen Höhe h und deren Grundflächen denselben Flächeninhalt A besitzen. Zeigen Sie mit dem Satz von Fubini, dass beide Körper dann auch dasselbe Volumen V besitzen.

Besprechung der Votieraufgaben in den Übungen am
Freitag, den 03.11.2017 .
Die schriftlichen Aufgaben werden in der darauffolgenden Übung besprochen.