

Analysis 3  
Vorlesung im Wintersemester 2017/2018

## Übungsblatt 3

**Aufgabe 3.1** (schriftlich, 4 Punkte)

a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_K \ln(x^2 + y^2) dx dy,$$

wobei der Integrationsbereich durch  $K = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 1 \}$  gegeben ist.

b) Berechnen Sie den Schwerpunkt des Kugeloktanten

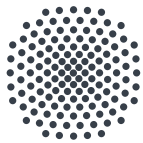
$$V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \}$$

mit der homogenen Massendichte  $\rho(x, y, z) = 1$ .

**Aufgabe 3.2** Berechnen Sie unter Annahme einer homogenen Massendichte  $\rho(x, y, z) = \rho_0$  zunächst das Volumen von

$$R = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 1 \}.$$

Berechnen Sie dann im nächsten Schritt den Schwerpunkt von  $R$  sowie das Trägheitsmoment von  $R$  bezüglich der  $z$ -Achse.



**Aufgabe 3.3** a) Sei  $B \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\}$  diejenige Fläche, die durch die Kurven  $xy = 1$ ,  $xy = 3$ ,  $x^2 - y^2 = 2$  und  $x^2 - y^2 = 6$  begrenzt wird. Berechnen Sie das Integral

$$\int_B (1 - \frac{1}{2}|x^2 - y^2 - 4|)(1 - |xy - 2|)(x^2 + y^2) \, dx dy.$$

Verwenden Sie dabei die Koordinatentransformation  $u := \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$ ,  $v := xy$  sowie den Transformationssatz.

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Vollellipse

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$

in Abhängigkeit der Konstanten  $a \geq b > 0$  auf möglichst einfache Weise. Verwenden Sie dabei den Transformationssatz und die Tatsache, dass die Einheitskreisscheibe  $\overline{B_1(0)}$  den Flächeninhalt  $\pi$  besitzt.

**Aufgabe 3.4** Sei  $M$  eine quadrierbare Menge mit dem Schwerpunkt  $S$ .

a) Es ist  $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine Bewegung mit  $\phi(x) = A \cdot x + b$ , wobei  $A$  eine orthogonale Matrix ist,  $b \in \mathbb{R}^3$  und  $M' := \phi(M)$ . Dann gilt für den Schwerpunkt  $S'$  von  $M'$  die Beziehung

$$S' = \phi(S) = A \cdot S + b.$$

b) Angenommen, es existiert eine Ebene  $E$ , so dass  $M$  unter einer Spiegelung an  $E$  in sich selber übergeht. Zeigen Sie, dass dann der Schwerpunkt  $S$  von  $M$  in  $E$  liegt.