Universität Stuttgart

PD Dr. Wolf-Patrick Düll
Insitut für Analysis, Dynamik
und Modellierung

Analysis 3
Vorlesung im Wintersemester 2017/2018

Übungsblatt 3

Aufgabe 3.1 (schriftlich, 4 Punkte)

a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_K \ln(x^2+y^2)dxdy,$$

wobei der Integrationsbereich durch $K = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{1}{4} \le x^2+y^2 \le 1 \right\}$ gegeben ist.

b) Berechnen Sie den Schwerpunkt des Kugeloktanten

$$V = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x,y,z \ge 0,\, x^2+y^2+z^2 \le 1 \right\}$$

mit der homogenen Massendichte $\rho(x,y,z) = 1$.

Aufgabe 3.2 Berechnen Sie unter Annahme einer homogenen Massendichte $\rho(x,y,z) = \rho_0$ zunächst das Volumen von

$$R = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x \ge 0,\, y \ge 0,\ x^2+y^2 \le 4,\, 0 \le z \le 1 \right\}.$$

Berechnen Sie dann im nächsten Schritt den Schwerpunkt von R sowie das Trägheitsmoment von R bezüglich der z-Achse.

Aufgabe 3.3 **a)** Sei $B \subset \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0 \}$ diejenige Fläche, die durch die Kurven $xy = 1,\ xy = 3,\ x^2 - y^2 = 2$ und $x^2 - y^2 = 6$ begrenzt wird. Berechnen Sie das Integral

$$\int_B (1 - \tfrac{1}{2}|x^2 - y^2 - 4|)(1 - |xy - 2|)(x^2 + y^2)\, dxdy.$$

Verwenden Sie dabei die Koordinatentransformation $u := \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$, $v := xy$ sowie den Transformationssatz.

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Vollellipse

$$E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$

in Abhängigkeit der Konstanten $a \geq b > 0$ auf möglichst einfache Weise. Verwenden Sie dabei den Transformationssatz und die Tatsache, dass die Einheitskreisscheibe $\overline{B_1(0)}$ den Flächeninhalt π besitzt.

Aufgabe 3.4 Sei M eine quadrierbare Menge mit dem Schwerpunkt S.

a) Es ist $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine Bewegung mit $\phi(x) = A \cdot x + b$, wobei A eine orthogonale Matrix ist, $b \in \mathbb{R}^3$ und $M' := \phi(M)$. Dann gilt für den Schwerpunkt S' von M' die Beziehung

$$S' = \phi(S) = A \cdot S + b.$$

b) Angenommen, es existiert eine Ebene E, so dass M unter einer Spiegelung an E in sich selber übergeht. Zeigen Sie, dass dann der Schwerpunkt S von M in E liegt.

Besprechung der Votieraufgaben in den Übungen am
Freitag, den 10.11.2017.
Die schriftlichen Aufgaben werden in der darauffolgenden Übung besprochen.