

Analysis 3  
Vorlesung im Wintersemester 2017/2018

## Übungsblatt 4

**Aufgabe 4.1 (schriftlich, 4 Punkte)**

a) Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale.

(i)  $\int_A \frac{\ln(\sqrt{x^2 + y^2})}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{4}}} dx dy$  mit  $A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$

(ii)  $\int_B \frac{\ln(\sqrt{x^2 + y^2})}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy$  mit  $B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 1 \right\}$

b) Sei  $K \subset \mathbb{R}^2$  die Kreisscheibe mit Radius  $r = 1$ . Untersuchen Sie, ob folgende Integrale konvergieren.

(i)  $\int_{K \setminus \{0\}} \frac{e^{x^2 + y^2}}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$

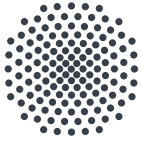
(ii)  $\int_{K \setminus \{0\}} \frac{\cos(x^2 + y^2) - 1}{x^2 + y^2} dx dy$

**Aufgabe 4.2** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $\phi : \Omega \rightarrow \phi(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Diffeomorphismus und  $M \subseteq \overline{M} \subset \Omega$ .  
Dann gilt:

(i)  $\partial(\phi(M)) = \phi(\partial M)$ .

(ii) Ist  $M$  quadrierbar, dann ist auch  $\phi(M)$  quadrierbar.

**Aufgabe 4.3** Zeigen Sie, dass auf  $\mathbb{R}^n$  genau eine Inhaltsfunktion existiert, nämlich die in der Vorlesung definierte Funktion  $V : \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ .



**Aufgabe 4.4** a) Sei  $\Omega_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < |x| \leq 1\}$  und  $\Omega_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \geq 1\}$ . Untersuchen Sie, für welche Konstanten  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  die dreidimensionalen uneigentlichen Integrale

$$\int_{\Omega_1} |x|^\alpha dx \quad \text{und} \quad \int_{\Omega_2} |x|^\beta dx$$

konvergieren.

b) Sei  $\Omega$  eine beschränkte, offene Menge des  $\mathbb{R}^3$  und sei  $f \in C^0(\overline{\Omega})$ . Gegeben ist das Integral

$$U(x) = \int_{\Omega \setminus \{x\}} \frac{f(y)}{|y-x|} dy.$$

Zeigen Sie, dass  $U(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}^3$  konvergiert.

*Anmerkung:  $U(x)$  beschreibt physikalisch das Coulomb-Potential einer elektrisch geladenen Menge  $\Omega$ , welches von einer Ladungsdichte  $f$  erzeugt wird.*

Besprechung der Votieraufgaben in den Übungen am  
**Freitag, den 17.11.2017.**

Die schriftlichen Aufgaben werden in der darauffolgenden Übung besprochen.