Universität Stuttgart

PD Dr. Wolf-Patrick Düll
Insitut für Analysis, Dynamik
und Modellierung

Analysis 3
Vorlesung im Wintersemester 2017/2018

Übungsblatt 5

Aufgabe 5.1 (schriftlich, 4 Punkte)

a) (i) Zeigen Sie, dass

$$Z := \left\{(\cos(\varphi), \sin(\varphi), h) \,\middle|\, \varphi \in (-\pi, \pi), h \in (-1, 1)\right\}$$

eine zweidimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^3$ ist.

(ii) Seien $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$$
$$g(x, y, z) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 - 1.$$

Zeigen Sie, dass $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) = g(x) = 0\}$ eine eindimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Geben Sie für die angegebenen Mannigfaltigkeiten jeweils eine Basis des Tangentialraums in den angegebenen Punkten p an.

(i) $E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + 2z^2 = 1\right\}$, $p = (x_0, y_0, z_0)$.

(ii) $T = \left\{((1 + \cos(s))\cos(t), (1 + \cos(s))\sin(t), \sin(s)) \,\middle|\, s \in (-\pi, \pi), t \in (0, 2\pi)\right\}$, $p = (-2, 0, 0)$.

Anmerkung: T stellt einen zweidimensionalen, geschlitzten Torus dar.

Aufgabe 5.2 **a)** Es ist $1 \le m \le n$ und die Vektoren z_i mit $1 \le i \le m$ sind linear unabhängig im $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $span\{z_i \mid 1 \le i \le m\}$ eine m-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$ ist.

b) Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = 4x_1^5 + x_3^7 + x_1^3 + x_2^3 + 2x_3^3.$$

Zeigen Sie, dass $f^{-1}(1)$ eine zweidimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^3$ ist.

c) Zeigen Sie, dass

$$M := \left\{(x, y, y + \sin(x)) \,\middle|\, x \in (-\pi, \pi), y \in (-1, 1)\right\}$$

eine zweidimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^3$ ist.

d) Zeigen Sie, dass

$$H := \left\{(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), \varphi) \,\middle|\, \varphi \in (-4\pi, 4\pi), r \in (0, 1)\right\}$$

eine zweidimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^3$ ist.

Aufgabe 5.3 **a)** Geben Sie für die eindimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit aus der Aufgabe 5.1.a(ii) einen Atlas an.

b) Bestimmen Sie einen Atlas der zweidimensionalen Einheitssphäre $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2 = 1\}$ mit Hilfe von Kugelkoordinaten.

Aufgabe 5.4 **a)** Zeigen Sie, dass die Menge aller orthogonalen 3×3-Matrizen $O(3)$ eine dreidimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^{3\times 3} \cong \mathbb{R}^9$ ist.
Hinweis: Betrachten Sie die Abbildung $F : \mathbb{R}^{3\times 3} \to \mathbb{R}^{3\times 3}$ *mit* $F(A) := A^T A - Id$.

b) Zeigen Sie, dass die Menge aller invertierbaren $3 \times 3-$Matrizen $GL(3,\mathbb{R})$ eine 9-dimensionale C^∞- Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^{3\times 3} \cong \mathbb{R}^9$ ist.
Hinweis: Verwenden Sie beim Beweis die Stetigkeit der Determinantenabbildung $det : \mathbb{R}^{3\times 3} \to \mathbb{R}$.

Aufgabe 5.5 **a)** Geben Sie für die Mannigfaltigkeit

$$M := \Big\{(x, y, y + \sin(x)) \,\Big|\, x \in (-\pi, \pi), y \in \mathbb{R}\Big\}$$

eine Basis des Tangentialraums im Punkt $p = (x_0, y_0, y_0 + \sin(x_0))$ an.

b) Sei $\widetilde{S}^2$ eine durch die Parametrisierung

$$h^{-1}(\varphi, \xi) = (\sin(\xi)\cos(\varphi), \sin(\xi)\sin(\varphi), \cos(\xi)) \,,\; (\varphi, \xi) \in (0, 2\pi) \times (0, \pi)$$

gegebene, geschlitzte Einheitssphäre im $\mathbb{R}^3$. Dann ist $(\widetilde{S}^2, h)$ eine Karte von $\widetilde{S}^2$. Sei nun v die Einschränkung der Funktion $(x, y, z) \mapsto xyz$ von $\mathbb{R}^3$ auf $\widetilde{S}^2$. Berechnen Sie die Matrixdarstellung des Differentials von v in $p = h^{-1}(\varphi_0, \xi_0)$ bezüglich der von der Karte $(\widetilde{S}^2, h)$ induzierten Basis $\{\frac{\partial h^{-1}}{\partial \varphi}(\varphi_0, \xi_0), \frac{\partial h^{-1}}{\partial \xi}(\varphi_0, \xi_0)\}$ von $T_p\widetilde{S}^2$ und der kanonischen Basis von $\mathbb{R} = T_{v(p)}\mathbb{R}$.

Besprechung der Votieraufgaben in den Übungen am
Freitag, den 24.11.2017.
Die schriftlichen Aufgaben werden in der darauffolgenden Übung besprochen.