Universität Stuttgart

PD Dr. Wolf-Patrick Düll
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Analysis 3
Vorlesung im Wintersemester 2017/2018

Übungsblatt 6

Aufgabe 6.1 (schriftlich, 4 Punkte)

a) Gegeben sei der Kegelmantel

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 < x^2 + y^2 < 1 \,\wedge\, z = \sqrt{x^2 + y^2}\right\}.$$

Berechnen Sie den Flächeninhalt von M unter Verwendung kartesischer Koordinaten sowie unter Verwendung von Polarkoordinaten.

b) Sei $\mathcal{F} = F(B)$ eine parametrisierte m-dimensionale immergierte Fläche, F ist injektiv und die Funktionen $f, g : F(B) \to \mathbb{R}$ sind beschränkt. Außerdem sei $f \leq g$ auf $\mathcal{F}$ und die Integrale $\int_{\mathcal{F}} f do$ und $\int_{\mathcal{F}} g do$ existieren. Dann gelten für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ die folgenden Aussagen:

(i)

$$\alpha \int_{\mathcal{F}} f\, do + \beta \int_{\mathcal{F}} g\, do = \int_{\mathcal{F}} (\alpha f + \beta g)\; do$$

(ii)

$$\int_{\mathcal{F}} f\, do \leq \int_{\mathcal{F}} g\, do$$

Aufgabe 6.2 Die Fläche $\mathcal{F}$ ist gegeben durch die Parametrisierung

$$F(u, v) = \begin{pmatrix} u + v \\ u - v \\ 2uv \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

Weiter sei $Z := \{\,(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 \leq 4\,\}$. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Teils von $\mathcal{F}$, der innerhalb des Zylinders Z liegt.

Aufgabe 6.3 Sei $\mathcal{F} = F(B) \subset \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte m-dimensionale immergierte C^k-Fläche, F sei injektiv und außerdem gelte $U \in O(n)$ und $b \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass

$$A(U\mathcal{F} + b) = A(\mathcal{F})$$

gilt, wobei $U\mathcal{F} + b := \{Ux + b \,|\, x \in \mathcal{F}\}$.

Aufgabe 6.4 Der Schwerpunkt einer parametrisierten zweidimensionalen eingebetteten C^k-Fläche $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ mit einer homogenen Dichte $\rho = 1$ ist gegeben durch

$$S_{\mathcal{F}} = \frac{1}{A(\mathcal{F})} \int_{\mathcal{F}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} do.$$

a) Berechnen Sie den Schwerpunkt der Einheitssphäre S^2.

b) Berechnen Sie den Schwerpunkt der oberen Halbsphäre $S^2 \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z > 0\}$.

c) Berechnen Sie den Schwerpunkt des Dreiecks mit den Eckpunkten $(1, 0, 0)$,$(0, 2, 0)$ und $(0, 0, 3)$.

Aufgabe 6.5 **a)** Sei $f \in C^1((a, b), \mathbb{R})$ und $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ die Fläche, die durch Rotation des Graphen $\{(x, f(x)) \,|\, x \in (a, b)\}$ um die x-Achse erzeugt wird. Zeigen Sie, dass ihr Flächeninhalt gegeben ist durch

$$A(\mathcal{F}) = 2\pi \int_{x=a}^{b} f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Kegelmantels M aus der Aufgabe 6.1.a mit Hilfe der in 6.5.a genannten Formel.

Besprechung der Votieraufgaben in den Übungen am
Freitag, den 01.12.2017.
Die schriftlichen Aufgaben werden in der darauffolgenden Übung besprochen.