Universität Stuttgart

PD Dr. Wolf-Patrick Düll
Insitut für Analysis, Dynamik
und Modellierung

Analysis 3
Vorlesung im Wintersemester 2017/2018

Übungsblatt 7

Aufgabe 7.1 (schriftlich, 4 Punkte)

a) Sei $\Omega_a := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \leq 1, y \geq 0\}$ ein beschränktes, stückweise C^1-berandetes Gebiet, n ein äußeres Einheitsnormalenfeld von Ω_a und $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei definiert durch

$$v(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ xy \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den Fluss $\int_{\partial\Omega_a} \langle v, n\rangle \, do$ mit Hilfe des Integralsatzes von Gauß.

b) Sei $\Omega_b := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2\}$ ein beschränktes, stückweise C^1-berandetes Gebiet, n ein äußeres Einheitsnormalenfeld von Ω_b und $w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei definiert durch

$$w(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \\ x+z \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den Fluss $\int_{\partial\Omega_b} \langle w, n\rangle \, do$ sowohl direkt als auch mit Hilfe des Integralsatzes von Gauß.

Aufgabe 7.2 Gegeben sei der Kegelmantel

$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2 \leq 1 \wedge z = \sqrt{x^2+y^2}\right\}$$

sowie das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $v(x,y,z) = (x-z,\, x^2+yz,\, -3+y^2)^T$.

a) Berechnen Sie $\int_M f(x,y,z)\, do$ für $f(x,y,z) = (x^2+y^2+(z-1)^2)^{-1/2}$.

b) Berechnen Sie den Fluss $\int_B \langle v, n\rangle \, do$, wobei $B := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2 \leq 1 \wedge z = 1\}$ sei und n positive z-Komponente habe.

c) Berechnen Sie $\int_K \operatorname{div} v(x,y,z)\, dxdydz$, wobei $K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1\}$ ist.

d) Bestimmen Sie den Fluss $\int_M \langle v, n\rangle \, do$, wobei n aus K herauszeige.

Aufgabe 7.3 **a)** Sei $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ eine geschlossene, stückweise C^1-Kurve, welche eine Fläche $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ umschließt. Zeigen Sie, dass der Inhalt $V(\Omega)$ der eingeschlossenen Fläche bestimmt wird durch

$$V(\Omega) = \frac{1}{2} \int_{t=a}^{b} x(t)\dot{y}(t) - y(t)\dot{x}(t)\, dt.$$

b) Gegeben sei im $\mathbb{R}^2$ das n-Eck mit den Eckpunkten $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_{n-1}, y_{n-1})$, (x_n, y_n). Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt des n-Ecks durch

$$\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1})$$

gegeben ist.

Aufgabe 7.4 Sei $a(x, y, z) := (0, 0, -g\rho z)^T$ mit Konstanten $g, \rho > 0$ und sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes, stückweise C^1-berandetes Gebiet und n ein äußeres Einheitsnormalenfeld von Ω. Drücken Sie den Wert des Integrals

$$-\int_{\partial\Omega} \langle a, n \rangle\, do$$

durch eine Formel aus, die $V(\Omega)$ enthält.

Anmerkung: Wenn g den Wert der Erdbeschleunigung annimmt, dann gibt die Formel den Betrag des Auftriebs eines homogenen, mit Masse der Dichte ρ belegten Körpers Ω an. (Archimedisches Prinzip)

Besprechung der Votieraufgaben in den Übungen am

Freitag, den 08.12.2017.

Die schriftlichen Aufgaben werden in der darauffolgenden Übung besprochen.