

Analysis 3  
Vorlesung im Wintersemester 2017/2018

## Übungsblatt 7

### Aufgabe 7.1 (schriftlich, 4 Punkte)

- a) Sei  $\Omega_a := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$  ein beschränktes, stückweise  $C^1$ -berandetes Gebiet,  $n$  ein äußeres Einheitsnormalenfeld von  $\Omega_a$  und  $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  sei definiert durch

$$v(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ xy \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den Fluss  $\int_{\partial\Omega_a} \langle v, n \rangle do$  mit Hilfe des Integralsatzes von Gauß.

- b) Sei  $\Omega_b := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2\}$  ein beschränktes, stückweise  $C^1$ -berandetes Gebiet,  $n$  ein äußeres Einheitsnormalenfeld von  $\Omega_b$  und  $w : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  sei definiert durch

$$w(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y \\ y + z \\ x + z \end{pmatrix}.$$

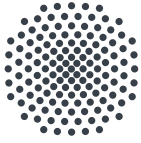
Berechnen Sie den Fluss  $\int_{\partial\Omega_b} \langle w, n \rangle do$  sowohl direkt als auch mit Hilfe des Integralsatzes von Gauß.

### Aufgabe 7.2 Gegeben sei der Kegelmantel

$$M = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \wedge z = \sqrt{x^2 + y^2} \right\}$$

sowie das Vektorfeld  $v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $v(x, y, z) = (x - z, x^2 + yz, -3 + y^2)^T$ .

- a) Berechnen Sie  $\int_M f(x, y, z) do$  für  $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + (z - 1)^2)^{-1/2}$ .
- b) Berechnen Sie den Fluss  $\int_B \langle v, n \rangle do$ , wobei  $B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \wedge z = 1\}$  sei und  $n$  positive  $z$ -Komponente habe.
- c) Berechnen Sie  $\int_K \operatorname{div} v(x, y, z) dx dy dz$ , wobei  $K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1\}$  ist.
- d) Bestimmen Sie den Fluss  $\int_M \langle v, n \rangle do$ , wobei  $n$  aus  $K$  herauszeige.



**Aufgabe 7.3** a) Sei  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine geschlossene, stückweise  $C^1$ -Kurve, welche eine Fläche  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  umschließt. Zeigen Sie, dass der Inhalt  $V(\Omega)$  der eingeschlossenen Fläche bestimmt wird durch

$$V(\Omega) = \frac{1}{2} \int_{t=a}^b x(t)y'(t) - y(t)x'(t) dt.$$

b) Gegeben sei im  $\mathbb{R}^2$  das  $n$ -Eck mit den Eckpunkten  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1}), (x_n, y_n)$ . Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt des  $n$ -Ecks durch

$$\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1})$$

gegeben ist.

**Aufgabe 7.4** Sei  $a(x, y, z) := (0, 0, -g\rho z)^T$  mit Konstanten  $g, \rho > 0$  und sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  ein beschränktes, stückweise  $C^1$ -berandetes Gebiet und  $n$  ein äußeres Einheitsnormalenfeld von  $\Omega$ . Drücken Sie den Wert des Integrals

$$- \int_{\partial\Omega} \langle a, n \rangle d\sigma$$

durch eine Formel aus, die  $V(\Omega)$  enthält.

*Anmerkung: Wenn  $g$  den Wert der Erdbeschleunigung annimmt, dann gibt die Formel den Betrag des Auftriebs eines homogenen, mit Masse der Dichte  $\rho$  belegten Körpers  $\Omega$  an. (Archimedisches Prinzip)*

Besprechung der Votieraufgaben in den Übungen am  
**Freitag, den 08.12.2017.**

Die schriftlichen Aufgaben werden in der darauffolgenden Übung besprochen.