Universität Stuttgart

PD Dr. Wolf-Patrick Düll
Insitut für Analysis, Dynamik
und Modellierung

Analysis 3
Vorlesung im Wintersemester 2017/2018

Übungsblatt 8

Aufgabe 8.1 (schriftlich, 4 Punkte)

a) Gegeben seien das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $v(x,y,z) = (z-y, x-z, y-x)^T$ sowie die Fläche

$$\mathcal{F} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2 \leq 4 \wedge z = xy\right\}.$$

Berechnen Sie das Integral

$$\oint_{\partial\mathcal{F}} \langle v(x,y,z), \left(\begin{smallmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{smallmatrix}\right)\rangle$$

sowohl direkt als auch mittels eines Integralsatzes.

b) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, $v \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$, $\mathcal{F} \subset \Omega$ eine beschränkte, zusammenhängende, stückweise C^1-berandete parametrisierte zweidimensionale eingebettete C^2-Fläche, n ein Einheitsnormalenfeld auf $\mathcal{F}$ und $\partial\mathcal{F}$ positiv orientiert bezüglich n. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Steht das Vektorfeld v senkrecht auf dem Rand $\partial\mathcal{F}$, dann gilt

$$\int_{\mathcal{F}} \langle \operatorname{rot} v, n\rangle \, do = 0.$$

(ii) Ist das Vektorfeld v konstant, dann gilt

$$\oint_{\partial\mathcal{F}} \langle v(x), dx\rangle = 0.$$

Aufgabe 8.2 **a)** Es sei $G := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 \leq x \leq 2, x \leq y \leq x^2\}$. Das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei definiert durch

$$v(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x^2}{y} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral $\oint_{\partial G} \langle v(x,y), \left(\begin{smallmatrix} dx \\ dy \end{smallmatrix}\right)\rangle$, sowohl direkt als auch mittels eines Integralsatzes.

b) Das Bild der Kurve γ sei in Polarkoordinaten durch $\{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid r = \varphi,\ 0 \leq \varphi \leq \pi\}$ gegeben. Berechnen Sie $\int_\gamma \langle w(x,y), \left(\begin{smallmatrix} dx \\ dy \end{smallmatrix}\right)\rangle$ für das Vektorfeld $w(x,y) = (x(x^2+y^2), y(x^2+y^2))^T$ auf möglichst einfache Weise unter Zuhilfenahme eines Integralsatzes.

PD Dr. Wolf-Patrick Düll
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Aufgabe 8.3 Gegeben sei das Vektorfeld $v(x,y,z) = (-y, x, 1)^T$ sowie die Fläche

$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = r\cos\varphi,\; y = r\sin\varphi,\; z = r\cos^2\varphi,\; 0 \le r \le 1,\; 0 \le \varphi \le 2\pi\right\}.$$

Berechnen Sie das Integral $\oint_{\partial M} \langle v(x,y,z), \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \rangle$ sowohl direkt als auch mittels eines Integralsatzes.

Aufgabe 8.4 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, $v \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$, $n_0 \in S^2$, $x \in U$, $K_r(n_0, x) = \{y \in \mathbb{R}^3 : (y-x) \perp n_0 \wedge \|y-x\| \le r\}$ und $\partial K_r(n_0,x)$ positiv orientiert bezüglich n mit $n(y) = n_0$ für alle $y \in K_r(n_0,x)$. Zeigen Sie, dass dann

$$\langle \operatorname{rot} v(x), n_0 \rangle = \lim_{r \to 0} \frac{1}{V(K_r(n,x))} \oint_{\partial K_r(n_0,x)} \langle v(y), dy \rangle$$

gilt.

Aufgabe 8.5 Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, $v \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$, $\mathcal{F} \subset \Omega$ eine beschränkte, zusammenhängende, geschlossene (d.h $\partial\mathcal{F} = \emptyset$) parametrisierte zweidimensionale eingebettete C^2-Fläche und n ein Einheitsnormalenfeld auf $\mathcal{F}$. Zeigen Sie, dass dann

$$\int_{\mathcal{F}} \langle \operatorname{rot} v, n \rangle \, do = 0$$

gilt.

Besprechung der Votieraufgaben in den Übungen am
Freitag, den 15.12.2017.
Die schriftlichen Aufgaben werden in der darauffolgenden Übung besprochen.