

Analysis 3
Vorlesung im Wintersemester 2017/2018

Übungsblatt 8

Aufgabe 8.1 (schriftlich, 4 Punkte)

- a) Gegeben seien das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $v(x, y, z) = (z - y, x - z, y - x)^T$ sowie die Fläche

$$\mathcal{F} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4 \wedge z = xy \right\}.$$

Berechnen Sie das Integral

$$\oint_{\partial \mathcal{F}} \left\langle v(x, y, z), \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \right\rangle$$

sowohl direkt als auch mittels eines Integralsatzes.

- b) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, $v \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$, $\mathcal{F} \subset \Omega$ eine beschränkte, zusammenhängende, stückweise C^1 -berandete parametrisierte zweidimensionale eingebettete C^2 -Fläche, n ein Einheitsnormalenfeld auf \mathcal{F} und $\partial \mathcal{F}$ positiv orientiert bezüglich n . Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- (i) Steht das Vektorfeld v senkrecht auf dem Rand $\partial \mathcal{F}$, dann gilt

$$\int_{\mathcal{F}} \langle \operatorname{rot} v, n \rangle \, d\sigma = 0.$$

- (ii) Ist das Vektorfeld v konstant, dann gilt

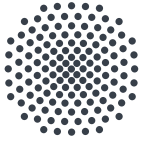
$$\oint_{\partial \mathcal{F}} \langle v(x), dx \rangle = 0.$$

- Aufgabe 8.2** a) Es sei $G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2, x \leq y \leq x^2\}$. Das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sei definiert durch

$$v(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{x^2}{y} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral $\oint_{\partial G} \langle v(x, y), \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \rangle$, sowohl direkt als auch mittels eines Integralsatzes.

- b) Das Bild der Kurve γ sei in Polarkoordinaten durch $\{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid r = \varphi, 0 \leq \varphi \leq \pi\}$ gegeben. Berechnen Sie $\int_{\gamma} \langle w(x, y), \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \rangle$ für das Vektorfeld $w(x, y) = (x(x^2 + y^2), y(x^2 + y^2))^T$ auf möglichst einfache Weise unter Zuhilfenahme eines Integralsatzes.



Aufgabe 8.3 Gegeben sei das Vektorfeld $v(x, y, z) = (-y, x, 1)^T$ sowie die Fläche

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = r \cos^2 \varphi, 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

Berechnen Sie das Integral $\oint_{\partial M} \langle v(x, y, z), \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \rangle$ sowohl direkt als auch mittels eines Integralsatzes.

Aufgabe 8.4 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, $v \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$, $n_0 \in S^2$, $x \in U$, $K_r(n_0, x) = \{y \in \mathbb{R}^3 : (y-x) \perp n_0 \wedge \|y-x\| \leq r\}$ und $\partial K_r(n_0, x)$ positiv orientiert bezüglich n mit $n(y) = n_0$ für alle $y \in K_r(n_0, x)$. Zeigen Sie, dass dann

$$\langle \operatorname{rot} v(x), n_0 \rangle = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{V(K_r(n_0, x))} \oint_{\partial K_r(n_0, x)} \langle v(y), dy \rangle$$

gilt.

Aufgabe 8.5 Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, $v \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$, $\mathcal{F} \subset \Omega$ eine beschränkte, zusammenhängende, geschlossene (d.h. $\partial \mathcal{F} = \emptyset$) parametrisierte zweidimensionale eingebettete C^2 -Fläche und n ein Einheitsnormalenfeld auf \mathcal{F} . Zeigen Sie, dass dann

$$\int_{\mathcal{F}} \langle \operatorname{rot} v, n \rangle do = 0$$

gilt.

Besprechung der Votieraufgaben in den Übungen am
Freitag, den 15.12.2017.

Die schriftlichen Aufgaben werden in der darauffolgenden Übung besprochen.