Universität Stuttgart

PD Dr. Wolf-Patrick Düll
Insitut für Analysis, Dynamik
und Modellierung

Analysis 3
Vorlesung im Wintersemester 2017/2018

Übungsblatt 9

Aufgabe 9.1 (schriftlich, 4 Punkte)

a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $u \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}) \cap C^0(\mathbb{R}^n \setminus \Omega)$ harmonisch auf $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$. Außerdem gelte $\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0$. Zeigen Sie, dass

$$|u(x)| \le \max_{y\in\partial\Omega} |u(y)|$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ gilt.

b) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $f \in C^0(\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega})$ und $g \in C^0(\partial\Omega)$. Außerdem gelte $\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0$. Zeigen Sie, dass dann das (Dirichlet-)Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega} \\ \quad\; u = g & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

höchstens eine Lösung $u \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}) \cap C^0(\mathbb{R}^n \setminus \Omega)$ besitzt.

Aufgabe 9.2 **a)** Zeigen Sie für C^2-Funktionen u auf der Kreisscheibe $B_R^2(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < R^2\} \subset \mathbb{R}^2$, dass

$$\Delta u(x,y) = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}\right)(r,\varphi)$$

gilt mit $U(r,\varphi) := u(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$ für $r \in (0,R)$ und $\varphi \in (-\pi,\pi)$.

Hinweis: Drücken Sie $\partial U/\partial r$ und $\partial^2 U/\partial\varphi^2$ durch Ableitungen von u aus.

b) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und sei $u \in C^2(\Omega)$. Außerdem sei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Bewegung mit $h(x) = Ax + b$, wobei $A \in O(2)$ und $b \in \mathbb{R}^2$ ist. Dann gilt

$$(\Delta u) \circ h = \Delta(u \circ h)$$

und insbesondere ist $u \circ h$ genau dann harmonisch auf $h^{-1}(\Omega)$, wenn u harmonisch auf Ω ist.

Aufgabe 9.3 **a)** Sei $\phi : \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$\phi(x,t) = \frac{1}{(4\pi)^{n/2}}\, t^\alpha\, e^{-\frac{|x-x_0|^2}{4t}}.$$

Bestimmen Sie α so, dass ϕ für ein beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}^n$ die Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u = \Delta u$ auf $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ löst.

b) Seien $f, g \in C^2(\mathbb{R})$ und $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $h(x,t) = f(x+\beta t) + g(x+\gamma t)$ und $\beta \neq \gamma$. Bestimmen Sie β und γ so, dass h die Wellengleichung $\partial_t^2 u = \Delta u$ auf $\mathbb{R}^2$ löst.

Aufgabe 9.4 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes, stückweise C^1-berandetes Gebiet, $T > 0$, $a \in C^3(\overline{\Omega})$, $a|_{\partial\Omega} = 0$, $f \in C^0(\Omega \times [0,T])$, $g \in C^3(\overline{\Omega})$ und $h \in C^0(\partial\Omega \times (0,T])$.

a) Sei $u \in C_1^3(\overline{\Omega}\times[0,T]) := \{v : \overline{\Omega}\times[0,T] \to \mathbb{R} \,|\, v, \partial_t v, \partial_x^\alpha v \in C^0(\overline{\Omega}\times[0,T])$ für alle $|\alpha| \leq 3\}$ eine Lösung von

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u & \text{in } \Omega \times [0,T] \\ u(x,0) = a(x) & \text{für alle } x \in \overline{\Omega} \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \times (0,T] \end{cases}$$

und

$$E(t) = \int_\Omega (u(x,t))^2 + \|\nabla u(x,t)\|^2 \, dx \, .$$

Zeigen Sie, dass $E(t) \leq E(0)$ für alle $t \in [0,T]$ ist.

Hinweis: Vertauschen Sie Differentiation nach t und Integration und verwenden Sie eine der Greenschen Formeln.

b) Zeigen Sie, dass das Anfangs-Randwertproblem

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f & \text{in } \Omega \times [0,T] \\ u(x,0) = g(x) & \text{für alle } x \in \overline{\Omega} \\ u = h & \text{auf } \partial\Omega \times (0,T] \end{cases}$$

höchstens eine Lösung $u \in C_1^3(\overline{\Omega} \times [0,T])$ hat.

Aufgabe 9.5 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes, stückweise C^1-berandetes Gebiet, $T > 0$, $a \in C^2(\overline{\Omega})$, $a|_{\partial\Omega} = 0$, $b \in C^1(\overline{\Omega})$, $b|_{\partial\Omega} = 0$ und $u \in C^2(\overline{\Omega} \times [0,T])$ eine Lösung von

$$\begin{cases} \partial_t^2 u = \Delta u & \text{in } \Omega \times [0,T] \\ u(x,0) = a(x) & \text{für alle } x \in \overline{\Omega} \\ \partial_t u(x,0) = b(x) & \text{für alle } x \in \overline{\Omega} \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \times (0,T] \end{cases}$$

und

$$E(t) = \int_\Omega (\partial_t u(x,t))^2 + \|\nabla u(x,t)\|^2 \, dx \, .$$

Zeigen Sie, dass $E(t) = E(0)$ für alle $t \in [0,T]$ ist.

Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten und ein gutes neues Jahr 2018!

Besprechung der Votieraufgaben in den Übungen am
Freitag, den 12.1.2018.
Die schriftlichen Aufgaben werden in der darauffolgenden Übung besprochen.