

Analysis 3
Vorlesung im Wintersemester 2017/2018

Übungsblatt 10

Aufgabe 10.1 (schriftlich, 4 Punkte)

- a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' + \cos(x)y = \sin(x)\cos(x), \quad y(0) = 1.$$

- b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = xy^2, \quad y(0) = 2.$$

Aufgabe 10.2 a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' + \frac{y}{x} = 2.$$

- b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = -\sqrt{y}.$$

Aufgabe 10.3 a) Lösen Sie das Anfangswertproblem für die Ähnlichkeitsdifferentialgleichung

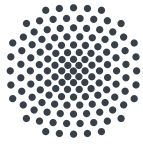
$$y' = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}, \quad y(1) = 0$$

und geben Sie das maximale Intervall an, auf dem die Lösung durch $(1, 0)$ definiert ist.

- b) Lösen Sie das Anfangswertproblem für die Bernoulli-Differentialgleichung

$$(1 + x^2)y' + xy - xy^2 = 0, \quad y(0) = \frac{1}{2}$$

und geben Sie das maximale Intervall an, auf dem die Lösung durch $(0, \frac{1}{2})$ definiert ist.



c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Riccati-Differentialgleichung

$$y' - 2x^2y + xy^2 = 1 - x^3.$$

Anmerkung: Es gibt hier eine Lösung der Form $y(x) = ax + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 10.4 In ein Becken mit Salzwasser der Konzentration C_1 (=Salzmenge/Volumen) wird eine kleine Zelle mit Volumen V und Oberfläche F eingetaucht. Die Zelle enthält ebenfalls Salzwasser, jedoch mit geringerer Konzentration C_2 . Über die salzdurchlässige Zellwand dringt nun von außen Salz in die Zelle ein. Der Salzmengenzuwachs in der Zelle kann als proportional zur Zelloberfläche, zur sich zeitlich ändernden Differenz zwischen Außen- und Innenkonzentration und zum Zeitzuwachs angenommen werden. Das Becken ist gegenüber der Zelle so groß, dass die Außenkonzentration C_1 als konstant angenommen werden kann.

Beschreiben Sie den Diffusionsprozess durch eine Differentialgleichung für die Salzkonzentration $c(t)$ in der Zelle und lösen Sie diese Differentialgleichung.

Aufgabe 10.5 Beweisen Sie den Satz 11.8 aus der Vorlesung.

Besprechung der Votieraufgaben in den Übungen am
Freitag, den 19.01.2018.

Die schriftlichen Aufgaben werden in der darauffolgenden Übung besprochen.