Universität Stuttgart

PD Dr. Wolf-Patrick Düll
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Analysis 3
Vorlesung im Wintersemester 2017/2018

Übungsblatt 12

Aufgabe 12.1 (schriftlich, 4 Punkte)

a) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Matrix-Exponentialfunktion e^{tA} für alle $t \in \mathbb{R}$ und lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x &= Ax \\ x(0) &= (1,2,1,0)^T. \end{cases}$$

b) Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Ist $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$ für alle Eigenwerte λ_i von A, dann gilt für alle $x_0 \in \mathbb{K}^d$, dass

$$\lim_{t\to\infty} e^{tA}x_0 = 0.$$

(ii) Existiert ein Eigenwert λ_k von A mit $\mathrm{Re}(\lambda_k) > 0$, dann exisiert ein $x_0 \in \mathbb{K}^d$ mit

$$\left\| e^{tA}x_0 \right\| \to \infty$$

für $t \to \infty$.

Aufgabe 12.2 **a)** Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x_1 &= -x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \frac{d}{dt}x_2 &= x_2 + 2x_3 \\ \frac{d}{dt}x_3 &= 4x_2 - x_3 \end{aligned}$$

mit der Anfangsbedingung $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (1,0,0)$ mit Hilfe der Matrix-Exponentialfunktion.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x_1 &= -x_1 + 2x_2 + x_3 + 2 \\ \frac{d}{dt}x_2 &= x_2 + 2x_3 \\ \frac{d}{dt}x_3 &= 4x_2 - x_3 \end{aligned}$$

mit Hilfe der Matrix-Exponentialfunktion.

Anmerkung: Es handelt sich hierbei um dieselben Differentialgleichungssysteme wie in den Aufgaben 11.2.b und 11.2.c.

Aufgabe 12.3 Schreiben Sie für die Lösung der folgenden Aufgaben die Gleichungen als ein System linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung und verwenden Sie die Matrix-Exponentialfunktion.

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von

$$\frac{d^2}{dt^2}x - 3\frac{d}{dt}x - 10x = e^{-2t}.$$

b) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{d^4}{dt^4}x + 4\frac{d^2}{dt^2}x = te^{2t}$$

mit den Anfangsbedingungen $x(0) = 1$ und $\frac{d}{dt}x(t)(0) = \frac{d^2}{dt^2}x(t) = \frac{d^3}{dt^3}x(t) = 0$.

Anmerkung: Es handelt sich hierbei um dieselben Differentialgleichungen wie in den Aufgaben 11.1.a und 11.2.a.

Aufgabe 12.4 Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung $(x_1(0), x_2(0)) = (0, 1)$ mit Hilfe der Matrix-Exponentialfunktion.

Anmerkung: Es handelt sich hierbei um dasselbe Differentialgleichungssystem wie in der Aufgabe 11.3.

Aufgabe 12.5 Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Ist $\mathrm{Re}(\lambda_i) \leq 0$ für alle Eigenwerte λ_i von A und sind alle Eigenwerte mit $\mathrm{Re}(\lambda_j) = 0$ halbeinfach (d.h. die algebraische und die geometrische Vielfachheit stimmen überein), dann ist $e^{tA}x_0$ für alle $x_0 \in \mathbb{K}^d$ und alle $t \geq 0$ beschränkt.

(ii) Existiert ein Eigenwert λ_k von A mit $\mathrm{Re}(\lambda_k) = 0$, und die geometrische Vielfachheit von λ_k ist kleiner als die algebraische Vielfachheit von λ_k, dann existiert ein $x_0 \in \mathbb{K}^d$ mit

$$\left\| e^{tA}x_0 \right\| \to \infty$$

für $t \to \infty$.

Besprechung der Votieraufgaben in den Übungen am
Freitag, den 02.02.2018.
Die schriftlichen Aufgaben werden in der darauffolgenden Übung besprochen.