Universität Stuttgart

PD Dr. Wolf-Patrick Düll
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Analysis 3
Vorlesung im Wintersemester 2017/2018

Übungsblatt 13

Aufgabe 13.1 Gegeben sei das Anfangswertproblem $y' = x^2(y-1)^\alpha$, $y(0) = b$. Zunächst gelte $\alpha = 1$ und $b = 2$.

a) Führen Sie drei Schritte des Iterationsverfahrens aus dem Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf aus und berechnen Sie $y_3(1)$ von der dritten Iteration als Näherung für $y(1)$.

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem exakt und berechnen Sie den Wert $y(1)$.

c) Nun sei α allgemein gewählt. Geben Sie eine hinreichende Bedingung für die Werte von α an, so dass das Anfangswertproblem mit $y(0) = 1$ lokal eindeutig lösbar ist.

Aufgabe 13.2 Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$ eine stetige Funktion, die Lipschitz-stetig bezüglich y ist. Zeigen Sie, dass dann die Lösung $y(x; x_0, y_0)$ von $y' = f(x, y), y(x_0; x_0, y_0) = y_0$ für x nahe x_0 stetig von den Anfangswerten y_0 abhängt, d.h. für alle $y_0 \in \mathbb{R}$ existiert eine Umgebung U von x_0, so dass die Funktion $(x, \tilde{y}) \mapsto y(x; x_0, \tilde{y})$ in jedem Punkt aus $U \times \{y_0\}$ stetig bezüglich $\tilde{y}$ ist.

Aufgabe 13.3 Gegeben sei auf dem Quadranten $x \geq 0$, $y > 0$ für $0 < a < \frac{1}{2}$ folgendes autonome System:

$$\dot{x} = x(1 - y - ax), \qquad \dot{y} = y(-1 + x).$$

a) Bestimmen Sie alle Fixpunkte des Systems. Um was für Fixpunkte handelt es sich jeweils? Untersuchen Sie die Fixpunkte auf Stabilität.

b) Bestimmen Sie alle Fixpunkte des Differentialgleichungssystems

$$\dot{x} = x^2 + xy, \qquad \dot{y} = xy - 2x + y - 2.$$

Um was für Fixpunkte handelt es sich jeweils? Untersuchen Sie die Fixpunkte auf Stabilität.

Aufgabe 13.4 Sei $\alpha \geq 0$ und

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = -\alpha y + x - x^3.$$

a) Bestimmen Sie für $\alpha = 0$ alle Fixpunkte des Systems. Um was für Fixpunkte handelt es sich jeweils? Untersuchen Sie die Fixpunkte auf Stabilität.

b) Zeichnen Sie für $\alpha = 0$ die sogenannten Nulllinien $N_1 := \{(x, y) \mid \dot{x} = 0\}$ und $N_2 := \{(x, y) \mid \dot{y} = 0\}$ und skizzieren Sie das Phasenporträt. Skizzieren Sie auch das Phasenporträt für ein kleines $\alpha > 0$.

Alle Aufgaben auf diesem Blatt sind Votieraufgaben, die am
Freitag, den 09.02.2018.
in den Gruppenübungen besprochen werden.