

Probeklausur

Analysis III

03.02.2018

Name,
Vorname:

Matrikel-
Nummer:

Tutor:

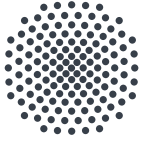
Aufgabe	1	2	3	4	5	6	gesamt
Punkte	/14	/9	/4	/5	/4	/4	/40

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit: 120 Minuten**
- **Erlaubte Hilfsmittel: keine**
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- **Alle Aufgaben** zählen.
- Bei **allen Aufgaben** sind die vollständigen Argumentationsschritte anzugeben. Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter.
- Die Besprechung der Probeklausur erfolgt in der Vortragsübung am **06.02.2018**
- Die Rückgabe der Probeklausuren erfolgt in den Übungsgruppen am **09.02.2018**

Viel Erfolg!

Bitte wenden!



Aufgabe 1 (2+2+2+2+2+2+2 Punkte)

Begründen Sie kurz oder widerlegen Sie:

- a) Sei M eine quadrierbare Menge und $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Außerdem sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gegeben mit $A \notin O(n)$. Dann gilt

$$\int_{A(M)} f(x) dx \neq \int_M f(Au) du.$$

- b) Die Menge

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$$

ist eine zweidimensionale C^∞ -Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^3 .

- c) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann ist die Menge

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0, f'(x) = 0\}$$

eine $(n-2)$ -dimensionale C^∞ -Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n .

- d) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ ein beschränktes, C^1 -berandetes Gebiet, $f \in C_c^1(\overline{\Omega})$ und $j \in \{1, \dots, m\}$. Dann gilt

$$\int_{\Omega} f(x) \partial_{x_j} f(x) dx = 0.$$

- e) Jede in ganz \mathbb{R}^n harmonische Funktion $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ ist konstant.

- f) Für $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ sei das Differentialgleichungssystem

$$\frac{d}{dt}x = Ax + b$$

gegeben. Wir betrachten zwei Lösungen $x_1, x_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n$ dieses Systems. Dann gilt

$$(x_1 - x_2)(t) = e^{tA}(x_1 - x_2)(0)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

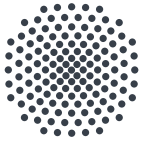
- g) Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' &= \sqrt{|x|} \sin(y) \\ y(x_0) &= y_0. \end{cases}$$

Für alle $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ existiert dann genau eine Lösung

$$y \in C^1([x_0 - h, x_0 + h])$$

für ein geeignetes $h > 0$.



Aufgabe 2 (3+2+2+2 Punkte)

- a) Bestimmen Sie das Integral der Funktion $f(x, y) = xy$ über der Fläche A , welche durch die Parabel $y = -x^2 - 2x$ und durch die x -Achse eingeschlossen wird.
- b) Gegeben seien nun die Halbsphäre

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4 \wedge z > 0\},$$

die Kreisfläche

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4 \wedge z = 0\}$$

und die Menge

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \wedge z \geq 0\}.$$

Außerdem sei das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch $v(x, y, z) = (yz, e^x + 3y, 1)^T$.

- (i) Berechnen Sie den Fluss $\int_K \langle v, n \rangle d\sigma$, wobei n eine negative z -Komponente haben soll.
- (ii) Berechnen Sie $\int_V \operatorname{div} v(x, y, z) dx dy dz$.
- (iii) Bestimmen Sie den Fluss $\int_M \langle v, n \rangle d\sigma$, wobei n aus M herauszeigen soll, mit Hilfe von (i), (ii) und einem Integralsatz.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Gegeben seien das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $v(x, y, z) = (xz^2, -y^2, y)^T$ sowie die Fläche

$$Z = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0 \wedge 3 \leq y \leq 7 \wedge x^2 + z^2 = 9 \right\}.$$

Berechnen Sie das Integral

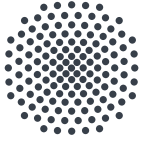
$$\oint_{\partial Z} \langle v(x, y, z), \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \rangle$$

mittels eines Integralsatzes.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung $y(x)$ des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} y_1' &= 5y_1 \\ y_2' &= 3y_2 - 2y_3 \\ y_3' &= 6y_2 - 3y_3 \end{aligned}$$



Aufgabe 5 (4 Punkte)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ein C^1 -berandetes Gebiet und $v \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ ein Vektorfeld und für alle $p \in \partial\Omega =: M$ gelte $v(p) \in T_p M$. Zeigen Sie, dass dann

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} v \, dV = 0$$

gilt.

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Sei $P(\lambda) = \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k$ ein Polynom mit $a_k \in \mathbb{C}$. Alle Nullstellen λ_j von P seien reell und von einfacher oder doppelter Vielfachheit und es gelte $\lambda_j \leq 0$. Außerdem sei y eine Lösung der Differentialgleichung

$$P\left(\frac{d}{dx}\right)y = 0.$$

Zeigen Sie, dass eine Konstante $C > 0$ existiert, so dass

$$\sup_{x \geq 0} |y'(x)| \leq C$$

gilt.
