Universität Stuttgart

Apl. Prof. Wolf-Patrick Düll
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Probeklausur Analysis III 03.02.2018

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Tutor:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	gesamt
Punkte	/14	/9	/4	/5	/4	/4	/40

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit: 120 Minuten**
- **Erlaubte Hilfsmittel: keine**
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- **Alle Aufgaben** zählen.
- Bei **allen Aufgaben** sind die vollständigen Argumentationsschritte anzugeben. Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter.
- Die Besprechung der Probeklausur erfolgt in der Vortragsübung am **06.02.2018**
- Die Rückgabe der Probeklausuren erfolgt in den Übungsgruppen am **09.02.2018**

Viel Erfolg!

Bitte wenden!

Universität Stuttgart

Apl. Prof. Wolf-Patrick Düll
Insitut für Analysis, Dynamik
und Modellierung

Aufgabe 1 (2+2+2+2+2+2+2 Punkte)

Begründen Sie kurz oder widerlegen Sie:

a) Sei M eine quadrierbare Menge und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Außerdem sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gegeben mit $A \notin O(n)$. Dann gilt

$$\int_{A(M)} f(x)\,dx \neq \int_M f(Au)\,du.$$

b) Die Menge

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 4\right\}$$

ist eine zweidimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$.

c) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann ist die Menge

$$M = \left\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, f(x) = 0\,,\ f'(x) = 0\right\}$$

eine (n-2)-dimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$.

d) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ ein beschränktes, C^1-berandetes Gebiet, $f \in C_c^1(\overline{\Omega})$ und $j \in \{1, \ldots, m\}$. Dann gilt

$$\int_\Omega f(x)\,\partial_{x_j} f(x)\,dx = 0.$$

e) Jede in ganz $\mathbb{R}^n$ harmonische Funktion $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ ist konstant.

f) Für $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ sei das Differentialgleichungssystem

$$\frac{d}{dt}x = Ax + b$$

gegeben. Wir betrachten zwei Lösungen $x_1, x_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^n$ dieses Systems. Dann gilt

$$(x_1 - x_2)(t) = e^{tA}(x_1 - x_2)(0)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

g) Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' &= \sqrt{|x|}\,\sin(y) \\ y(x_0) &= y_0. \end{cases}$$

Für alle $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ existiert dann genau eine Lösung

$$y \in C^1([x_0 - h, x_0 + h])$$

für ein geeignetes $h > 0$.

Aufgabe 2 (3+2+2+2 Punkte)

a) Bestimmen Sie das Integral der Funktion $f(x,y) = xy$ über der Fläche A, welche durch die Parabel $y = -x^2 - 2x$ und durch die x-Achse eingeschlossen wird.

b) Gegeben seien nun die Halbsphäre

$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 4 \wedge z > 0\right\},$$

die Kreisfläche

$$K = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 \leq 4 \wedge z = 0\right\}$$

und die Menge

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \wedge z \geq 0\}.$$

Außerdem sei das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch
$v(x,y,z) = (yz, e^x + 3y, 1)^T$.

(i) Berechnen Sie den Fluss $\int_K \langle v, n\rangle \, do$, wobei n eine negative z-Komponente haben soll.

(ii) Berechnen Sie $\int_V \operatorname{div} v(x,y,z) \, dxdydz$.

(iii) Bestimmen Sie den Fluss $\int_M \langle v, n\rangle \, do$, wobei n aus M herauszeigen soll, mit Hilfe von (i), (ii) und einem Integralsatz.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Gegeben seien das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $v(x,y,z) = (xz^2, -y^2, y)^T$ sowie die Fläche

$$Z = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x \geq 0 \wedge 3 \leq y \leq 7 \wedge x^2 + z^2 = 9\right\}.$$

Berechnen Sie das Integral

$$\oint_{\partial Z} \left\langle v(x,y,z), \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \right\rangle$$

mittels eines Integralsatzes.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung $y(x)$ des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} {y_1}' &= 5y_1 \\ {y_2}' &= 3y_2 - 2y_3 \\ {y_3}' &= 6y_2 - 3y_3 \end{aligned}$$

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ein C^1-berandetes Gebiet und $v \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ ein Vektorfeld und für alle $p \in \partial\Omega =: M$ gelte $v(p) \in T_pM$. Zeigen Sie, dass dann

$$\int_\Omega \operatorname{div} v \, dV = 0$$

gilt.

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Sei $P(\lambda) = \sum_{k=0}^n a_k \lambda_k$ ein Polynom mit $a_k \in \mathbb{C}$. Alle Nullstellen λ_j von P seien reell und von einfacher oder doppelter Vielfachheit und es gelte $\lambda_j \leq 0$. Außerdem sei y eine Lösung der Differentialgleichung

$$P\left(\frac{d}{dx}\right) y = 0.$$

Zeigen Sie, dass eine Konstante $C > 0$ existiert, so dass

$$\sup_{x \geq 0} |y'(x)| \leq C$$

gilt.
