Universität Stuttgart

PD Dr. Wolf-Patrick Düll
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Analysis 3
Vorlesung im Wintersemester 2017/2018

Vortragsübungsblatt 1

Aufgabe 1.1 Sei $M \subset \mathbb{R}^d$ quadrierbar. Man beweise folgende drei Aussagen:

a) Sei $f : M \to \mathbb{R}$ beschränkt und $|\{x \in M : f(x) \neq 0\}| = 0$. Dann ist f integrierbar[1] und $\int_M f dV = 0$.

b) Sei $f : M \to \mathbb{R}$ integrierbar und $g : M \to \mathbb{R}$ beschränkt. Sei außerdem $|\{x \in M : g(x) \neq f(x)\}| = 0$. Dann ist auch g integrierbar und es gilt

$$\int_M g dV = \int_M f dV. \tag{1}$$

c) Seien M_1, $M_2 \subset \mathbb{R}^d$ quadrierbare Mengen mit $M = M_1 \cup M_2$ und $|M_1 \cap M_2| = 0$. Ist nun entwender $f : M \to \mathbb{R}$ integierbar oder $f : M_i \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ integrierbar, so gilt

$$\int_M f dV = \int_{M_1} f dV + \int_{M_2} f dV. \tag{2}$$

Aufgabe 1.2 Sei $M \subset \mathbb{R}^d$ quadrierbar und $f : M \to \mathbb{R}$ integrierbar mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in M$. Wir setzen $\Omega = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{d+1} : x \in M,\ 0 \leq t \leq f(x)\}$. Beweisen Sie, dass

$$\int_M f(x)dx = |\Omega| = \int_{[0,||f||]} |\{x \in M : f(x) \geq t\}| dt, \tag{3}$$

wobei die zweite Gleichung unter der zusätzlichen Voraussetzung gilt, dass $\{x \in M : f(x) \geq t\} \subset \mathbb{R}^d$ für jedes $t \in [0, ||f||]$ eine quadrierbare Menge ist.

Bemerkung: $||f||$ bezeichnet die übliche Maximumsnorm für beschränkte Funktionen:

$$||f|| := \max_{x \in M} \big|f(x)\big|.$$

[1] Hier und im folgenden steht *integrierbar* stets als Abkürzung für *Riemann-integrierbar auf* der entsprechenden Menge – hier also: *Riemann-integrierbar auf M*.

Aufgabe 1.3 Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$M = \Big\{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 1 \ \wedge \ \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 - z \ \wedge \ x \geq 0 \wedge \ y \geq 0\Big\}.$$

Verwenden Sie den Transformationssatz sowie den Satz von Fubini, um folgendes Integral zu berechnen:

$$I = \int_M \cos(\sqrt{x^2 + y^2} + z) dx dy dz. \tag{4}$$

Aufgabe 1.4 Für eine Gerade $A \subset \mathbb{R}^3$ bezeichne $d_A(x) := \min\{|x - y| : y \in A\}$ den Abstand eines Punktes $x \in \mathbb{R}^3$ zu A. Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ quadrierbar und $\rho : M \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ integrierbar. Die Zahl

$$J_A := \int_M d_A(x)^2 \rho(x) dx$$

bezeichnen wir als Trägheitsmoment der Menge M (mit Massenverteilung ρ) bzgl. der Geraden A. Mithilfe des Transformationssatzes beweise man folgende Aussage, welche in der klassischen Mechanik als Satz von Steiner bekannt ist:

Sei A eine Gerade, die durch den Schwerpunkt $S \in \mathbb{R}^3$ geht (der Schwerpunkt wurde in Aufgabe 3, Übungsblatt 2, definiert). Das Trägheitsmoment $J_{A'}$ bzgl. einer zu A parallelen Geraden A' (der Abstand zwischen A und A' sei $d_{AA'} > 0$), ist dann gegeben durch

$$J_{A'} = J_A + m\,(d_{AA'})^2 \tag{5}$$

wobei m die Gesamtmasse der Menge M ist, d.h. $m := \int_M \rho(x) dx$.

Alle Aufgaben auf diesem Blatt werden am

Freitag, den 3.11.2017

in der Vortragsübung besprochen.