

Analysis 3
Vorlesung im Wintersemester 2017/2018

Vortragsübungsblatt 1

Aufgabe 1.1 Sei $M \subset \mathbb{R}^d$ quadrierbar. Man beweise folgende drei Aussagen:

- a) Sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und $|\{x \in M : f(x) \neq 0\}| = 0$. Dann ist f integrierbar¹ und $\int_M f dV = 0$.
- b) Sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Sei außerdem $|\{x \in M : g(x) \neq f(x)\}| = 0$. Dann ist auch g integrierbar und es gilt

$$\int_M g dV = \int_M f dV. \quad (1)$$

- c) Seien $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^d$ quadrierbare Mengen mit $M = M_1 \cup M_2$ und $|M_1 \cap M_2| = 0$. Ist nun entweder $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar oder $f : M_i \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, 2$) integrierbar, so gilt

$$\int_M f dV = \int_{M_1} f dV + \int_{M_2} f dV. \quad (2)$$

Aufgabe 1.2 Sei $M \subset \mathbb{R}^d$ quadrierbar und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in M$. Wir setzen $\Omega = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{d+1} : x \in M, 0 \leq t \leq f(x)\}$. Beweisen Sie, dass

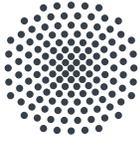
$$\int_M f(x) dx = |\Omega| = \int_{[0, \|f\|]} |\{x \in M : f(x) \geq t\}| dt, \quad (3)$$

wobei die zweite Gleichung unter der zusätzlichen Voraussetzung gilt, dass $\{x \in M : f(x) \geq t\} \subset \mathbb{R}^d$ für jedes $t \in [0, \|f\|]$ eine quadrierbare Menge ist.

Bemerkung: $\|f\|$ bezeichnet die übliche Maximumsnorm für beschränkte Funktionen:

$$\|f\| := \max_{x \in M} |f(x)|.$$

¹Hier und im folgenden steht *integrierbar* stets als Abkürzung für *Riemann-integrierbar auf der entsprechenden Menge* – hier also: *Riemann-integrierbar auf M* .



Aufgabe 1.3 Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$M = \left\{ (x, y, z) : 0 \leq z \leq 1 \wedge \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 - z \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0 \right\}.$$

Verwenden Sie den Transformationssatz sowie den Satz von Fubini, um folgendes Integral zu berechnen:

$$I = \int_M \cos(\sqrt{x^2 + y^2} + z) dx dy dz. \quad (4)$$

Aufgabe 1.4 Für eine Gerade $A \subset \mathbb{R}^3$ bezeichne $d_A(x) := \min\{|x - y| : y \in A\}$ den Abstand eines Punktes $x \in \mathbb{R}^3$ zu A . Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ quadrierbar und $\rho : M \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ integrierbar. Die Zahl

$$J_A := \int_M d_A(x)^2 \rho(x) dx$$

bezeichnen wir als Trägheitsmoment der Menge M (mit Massenverteilung ρ) bzgl. der Geraden A . Mithilfe des Transformationssatzes beweise man folgende Aussage, welche in der klassischen Mechanik als Satz von Steiner bekannt ist:

Sei A eine Gerade, die durch den Schwerpunkt $S \in \mathbb{R}^3$ geht (der Schwerpunkt wurde in Aufgabe 3, Übungsblatt 2, definiert). Das Trägheitsmoment $J_{A'}$ bzgl. einer zu A parallelen Geraden A' (der Abstand zwischen A und A' sei $d_{AA'} > 0$), ist dann gegeben durch

$$J_{A'} = J_A + m (d_{AA'})^2 \quad (5)$$

wobei m die Gesamtmasse der Menge M ist, d.h. $m := \int_M \rho(x) dx$.