Universität Stuttgart

PD Dr. Wolf-Patrick Düll
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Analysis 3
Vorlesung im Wintersemester 2017/2018

Vortragsübungsblatt 2

Aufgabe 2.1 (Mehrdimensionales Gauß-Integral)

Sei A eine positiv-definite symmetrische $n \times n$ Matrix mit reellen Einträgen. Wir bezeichnen die Eigenwerte mit $\lambda_1, ..., \lambda_n$ (*Erinnerung:* Positiv-definit bedeutet, dass alle Eigenwerte der Matrix A positiv sind).

(a) Zeigen Sie, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-x^T Ax} dx = \sqrt{\frac{\pi^n}{\det(A)}}, \tag{1}$$

wobei dx abkürzend für $dx_1...dx_n$ steht.[1]

Hinweis: Diagonalisieren Sie A und verwenden Sie die Koordinaten, die dieser Diagonalisierung entsprechen. Damit können Sie das Problem auf die Berechnung von eindimensionalen Gauß-Integralen der Form $I(\alpha) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2} dx$ mit $\alpha > 0$ zurückführen (für $\alpha = 1$ wurde letzteres bereits in der Vorlesung berechnet).

(c) Berechnen Sie die Einträge der Matrix $C = (C_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, definiert durch

$$C_{ij} := \int_{\mathbb{R}^n} x_i x_j e^{-x^T Ax} dx. \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass $C = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi^n}{\det(A)}} A^{-1}$, wobei A^{-1} die inverse Matrix zu A ist.

Anleitung: Schreiben Sie den Integranden zunächst als Ableitung der Funktion $e^{-x^T Ax}$ (Ableitung bzgl. der Einträge der Matrix A). Vertauschen Sie dann die Integration mit der Ableitung (dass das in diesem Fall erlaubt ist, machen wir uns in Aufgabe 2.2 klar). Das Integral können Sie nun berechnen. Im letzten Schritt müssen Sie das Ergebnis wieder ableiten. Dazu können Sie die Laplace'sche Entwicklungsformel für Determinanten verwenden (oder etwas abkürzend, folgende Formel: $\frac{\partial}{\partial A_{ij}} \ln \det(A) = (A^{-1})_{ij}$).

[1] Die Definition des uneigentlichen Integrals finden Sie im Kurzskript unter Definition 4.2.

Aufgabe 2.2 (Lemma zur Vertauschung von Differentiation und Integration)

Wir betrachten quadrierbare Mengen M, N mit $M \subset \mathbb{R}^n$, $N \subset \mathbb{R}^m$, N kompakt, und parameterabhängige Integrale der Form

$$F(x) := \int_N f(x,y)dy, \qquad x \in M.$$

Man beweise folgende Aussagen.

(a) Ist $f : M \times N \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist auch $F : M \to \mathbb{R}$ stetig.

(b) Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ offen und sind f und $\frac{\partial}{\partial x_i} f$ für $i \in \{1, ..., n\}$ stetige Funktionen auf $M \times N$, dann ist auch $F : M \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar, und es gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_i} F(x) = \int_N \frac{\partial}{\partial x_i} f(x,y)dy, \qquad i \in \{1, ..., n\}. \tag{3}$$

(c) Nun betrachten wir $M = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $N = [c, d] \subset \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $c < d$. Seien die Funktionen f und $\frac{\partial}{\partial x} f$ stetig in $M \times N$, und $\varphi, \psi : M \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit $c \leq \varphi(x) \leq \psi(x) \leq d$ für alle $x \in M$. Dann gilt

$$\frac{d}{dx} \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)dy + \psi'(x) f(x, \psi(x)) - \varphi'(x) f(x, \varphi(x)).$$

Bemerkung: Für $m = n = 1$ stellt diese Aussage eine Verallgemeinerung von (b) dar, nämlich auf den Fall, dass die Integrationsgrenzen auch vom Parameter (d.h. hier von der Variable x) abhängen. Analoge Aussagen gelten auch für $n, m > 1$, sollen hier aber nicht bewiesen werden.

Alle Aufgaben auf diesem Blatt werden am
Donnerstag, den 9.11.2017
in der Vortragsübung besprochen.