Universität Stuttgart

PD Dr. Wolf-Patrick Düll
Insitut für Analysis, Dynamik
und Modellierung

Analysis 3
Vorlesung im Wintersemester 2017/2018

Vortragsübungsblatt 5

Aufgabe 5.1 Sei $\mathcal{F} = F(B) \subset \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte 2-dimensionale immergierte C^k-Fläche und F injektiv. Zeigen Sie, dass die Gramsche Determinante in diesem Fall geschrieben werden kann als

$$\det\Big(F'(x,y)^T F'(x,y)\Big) = \Big|\Big|\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} \times \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\Big|\Big|^2, \qquad (x,y) \in B.$$

wobei $\times$ das Kreuzprodukt zwischen zwei Vektoren im $\mathbb{R}^3$ beschreibt.

Aufgabe 5.2 (a) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y,z) = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}$, und

$$M := \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = x^2 + y^2, \ 0 \le x^2 + y^2 \le 1\Big\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Man berechne das Flächenintegral $A = \int_M f(x,y,z)\mathrm{d}o(x,y,z)$.

(b) Die Menge

$$W := \Big\{(r\cos\varphi, r\sin\varphi, a\varphi) \in \mathbb{R}^3 : \ (r,\varphi) \in (0,R) \times (0,\infty), \Big\} \subset \mathbb{R}^3$$

beschreibt die sogenannte Wendelfläche mit Radius $R > 0$ und Ganghöhe $2\pi a > 0$. Skizzieren Sie die Menge W und berechnen Sie den Flächeninhalt der Wendelfläche nach einer Umdrehung.

(c) Die Menge

$$E := \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\Big\} \subset \mathbb{R}^3$$

beschreibt die Oberfläche eines Ellipsoiden mit den Halbachsen $a, b, c > 0$. Berechnen Sie das Flächenintegral der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \sqrt{\frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{4b^2} + \frac{z^2}{4c^2}}$ über E.

Universität Stuttgart

PD Dr. Wolf-Patrick Düll
Insitut für Analysis, Dynamik
und Modellierung

Aufgabe 5.3 (Gramsche Determinante von Graphen) Sei $\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \mathbb{R}^n\}$ der Graph einer C^1-Abbildung $f : M \to \mathbb{R}$ mit $M \subset \mathbb{R}^n$ offen und quadrierbar.

(a) Zeigen Sie, dass für $n = 2$ der Flächeninhalt von $\Gamma(f)$ gegeben ist durch

$$\int_{\Gamma(f)} \mathrm{d}o = \int_M ||v_x(x, y) \times v_y(x, y)|| \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{1}$$

wobei

$$v_x(x, y) := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \end{pmatrix}, \qquad v_y(x, y) := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie ausgehend hiervon den Flächeninhalt desjenigen Teils des Paraboloids $z = x^2 + y^2$, der zwischen den Ebenen $z = 0$ und $z = 4$ liegt.

(b) Zeigen Sie, dass für $n \geq 1$ der Flächeninhalt von $\Gamma(f)$ gegeben ist durch

$$\int_{\Gamma(f)} \mathrm{d}o = \int_M \sqrt{1 + ||\nabla f(x)||^2} \mathrm{d}x_1 ... \mathrm{d}x_n, \tag{2}$$

wobei ∇ hier den Gradienten im $\mathbb{R}^n$ bezeichnet, d.h. $||\nabla f(x)||^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right)^2$.

Hinweis: Um den allgemeinen Fall ($n \geq 1$) zu beweisen, überlegt man sich die Aussage zunächst für die Abbildung $f(x) = b^T x$ mit $b \in \mathbb{R}^n$, $b \neq 0$. Hierfür rechnet man leicht nach, dass mithilfe der Parametrisierung $F(x) = (x, f(x))^T$, die Gramsche Determinante ausgedrückt werden kann als $\det(E_n + bb^T)$, wobei $E_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Einheitsmatrix bezeichnet und $bb^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ durch $(bb^T)_{ij} = b_i b_j$ definiert ist. Für die symmetrische Matrix $E_n + bb^T$ überlegt man sich als nächstes die dazugehörigen Eigenwerte (dazu betrachte man u.a. Vektoren $x \in \mathbb{R}^n$ mit $b^T x = 0$), um damit die Gramsche Determinante zu berechnen. Das Ergebnis liefert (2) für den Fall $f(x) = b^T x$. Mit derselben Herangehensweise kann man die Aussage auch für allgemeinere Abbilfungen f – wie oben angegeben – nachweisen.

Alle Aufgaben auf diesem Blatt werden am
Dienstag, den 28.11.2017
in der Vortragsübung besprochen.