Universität Stuttgart

PD Dr. Wolf-Patrick Düll
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Analysis 3
Vorlesung im Wintersemester 2017/2018

Vortragsübungsblatt 6

Aufgabe 6.1 (Satz von Gauß)

(a) Sei M ein stückweise C^1-berandetes Gebiet, definiert durch

$$M = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; x \in \big(-\pi/2, \pi/2\big), y \in \big(0, \cos(x)\big)\Big\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Sei außerdem v ein C^1-Vektorfeld gegeben durch $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $v(x, y) = (x - y^2, xy + y)^T$.

Berechnen sie den Fluss von v durch den Rand ∂M, d.h. $I_1 = \int_{\partial M} \langle v(x, y), n(x, y)\rangle \mathrm{d}o(x, y)$, wobei $n(x, y)$ das äußere Einheitsnormalenvektorveld M bezeichnet. Berechnen Sie außerdem das Integral $I_2 = \int_M \operatorname{div} v(x, y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, und vergleichen sie die beiden Ergebnisse.

(b) Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ ein Zylinder mit Radius $r = 2$ und Höhe $h = 3$, d.h.

$$M = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\Big|\; x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 3\Big\} \subset \mathbb{R}^3,$$

und $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein C^1-Vektorfeld mit $v(x, y, z) = (4x, -2y^2, z^2)^T$. Berechnen Sie

$$\int_M \operatorname{div} v(x, y, z) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad \text{und} \quad \int_{\partial M} \langle v(x, y, z), n(x, y, z)\rangle \mathrm{d}o(x, y, z),$$

wobei $n(x, y, z)$ wieder den Einheitsnormalenvektor bezgl. M im Punkt $(x, y, z) \in \partial M$ bezeichnet.

Aufgabe 6.2 (Korollar 7.5. aus der VL) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $v \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, dass dann für alle $x \in U$ gilt

$$\operatorname{div} v(x) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{V(B_r^n(x))} \int_{\partial B_r^n(x)} \langle v(y), n(y)\rangle \mathrm{d}o(y).$$

Hier bezeichnen $B_r^n(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < r\}$ die n-dimensionale Kugel mit Radius r um den Punkt $x \in U$, $\partial B_r^n(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| = r\}$ den Rand dieser Kugel, und $n(x)$ das äußere Einheitsnormalenvektorfeld von $B_r^n(x)$.

Universität Stuttgart

PD Dr. Wolf-Patrick Düll
Insitut für Analysis, Dynamik
und Modellierung

Aufgabe 6.3 Sei $M \subset \mathbb{R}^d$ ein stückweise C^1-berandetes Gebiet.

(a) Zeigen Sie, dass

$$V(M) = \frac{1}{d} \int_{\partial M} \langle x, n(x) \rangle \mathrm{d}o(x).$$

(b) Verwenden Sie (a), um zu zeigen, dass

$$V(B_r^n(0)) = \left(\frac{r}{d}\right) V(\partial B_r^d(0)),$$

wobei $V(B_r^d(0))$ den d-dimensionalen Inhalt der Kugel $B_r^d(0)$ mit Radius $r > 0$, und $V(\partial B_r^d(0))$ den $(d-1)$-dimensionalen Inhalt des Randes der Kugel bezeichnen.

Alle Aufgaben auf diesem Blatt werden am
Mittwoch, den 6.12.2017
in der Vortragsübung besprochen.