

Analysis 3

Vorlesung im Wintersemester 2017/2018

Vortragsübungsblatt 7

Aufgabe 7.1 (Satz von Green) Sei $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-2, 2], y \in [x^2, 4]\} \subset \mathbb{R}^2$, ∂K positiv orientiert, und sei $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch $v(x, y) = (e^x - y, \sin y + x)^T$. Rechnen Sie explizit nach, dass

$$\int_K \operatorname{rot} v(x, y) dx dy = \oint_{\partial K} \langle v(x, y), (dx, dy)^T \rangle .$$

Hinweis: Die Rotation von $v = (v_1, v_2)^T$ ist definiert als $\operatorname{rot} v(x, y) = \frac{\partial v_2(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial v_1(x, y)}{\partial y}$.

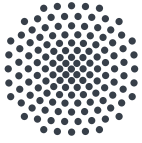
Aufgabe 7.2 (Satz von Stokes) Sei $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2z, 0 \leq z \leq 2\} \subset \mathbb{R}^3$ und $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $F(x, y, z) = (3y, -xz, yz^2)^T$. Berechnen Sie die Integrale

$$I_1 = \oint_{\partial M} \langle F(x, y, z), (dx, dy, dz)^T \rangle ,$$
$$I_2 = \int_M \langle \operatorname{rot} F(x, y, z), n(x, y, z) \rangle \operatorname{do}(x, y, z),$$

wobei $n(x, y, z)$ das Einheitsnormalenfeld der Menge M bezeichnet, welches in die *positive* z -Richtung zeigt.

Hinweis: Das Integral I_1 wird erst durch eine Laufrichtung eindeutig definiert. Per Definition muss der Rand ∂M positiv orientiert sein (im positiven Sinne durchlaufen werden), was wiederum von der Wahl eines äußeren Normalenfeldes der Menge M abhängt. Verwendet man in der gestellten Aufgabe ein rechtshändiges Koordinatensystem, so ist der Rand ∂M (bzgl. dem angegebenen Vektorfeld n) positiv orientiert, wenn er gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen wird. In diesem Fall ist dann $I_1 = I_2$.

Zusatz: Machen Sie sich den Zusammenhang zwischen Laufrichtung/Orientierung des Randes ∂M und der Wahl des Normalenfeldes n explizit klar, und überlegen Sie sich, dass der oben gegebene Hinweis zutrifft.



Aufgabe 7.3 Sei $Q > 0$. Auf $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ betrachten wir das Vektorfeld

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} F_1(x, y) \\ F_2(x, y) \end{pmatrix} := \frac{Q}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

- (a) Zeigen Sie, dass F auf dem Definitionsbereich die Gleichung $\frac{\partial F_2(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial F_1(x, y)}{\partial y} = 0$ erfüllt.
- (b) Sei $\partial B_r \subset \mathbb{R}^2$ der Rand des zwei-dimensionalen Kreises mit radius $r > 0$ um den Punkt $(0, 0)$. Zeigen Sie, dass $2\pi Q = \int_{\partial B_r} \langle F(x, y), (dx, dy)^T \rangle$.
- (c) Erklären Sie, warum die Ergebnisse aus (a) und (b) nicht im Widerspruch zum Integralsatz von Green stehen.