Universität Stuttgart

PD Dr. Wolf-Patrick Düll
Insitut für Analysis, Dynamik
und Modellierung

Analysis 3
Vorlesung im Wintersemester 2017/2018

Vortragsübungsblatt 7

Aufgabe 7.1 (Satz von Green) Sei $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-2, 2],\ y \in [x^2, 4]\} \subset \mathbb{R}^2$, ∂K positiv orientiert, und sei $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $v(x, y) = (e^x - y, \sin y + x)^T$. Rechnen Sie explizit nach, dass

$$\int_K \mathrm{rot} v(x, y) dx dy = \oint_{\partial K} < v(x, y), (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)^T > .$$

Hinweis: Die Rotation von $v = (v_1, v_2)^T$ ist definiert als $\mathrm{rot} v(x, y) = \frac{\partial v_2(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial v_1(x,y)}{\partial y}$.

Aufgabe 7.2 (Satz von Stokes) Sei $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2z, 0 \leq z \leq 2\} \subset \mathbb{R}^3$ und $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $F(x, y, z) = (3y, -xz, yz^2)^T$. Berechnen Sie die Integrale

$$I_1 = \oint_{\partial M} < F(x, y, z), (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)^T >,$$
$$I_2 = \int_M < \mathrm{rot} F(x, y, z), n(x, y, z) > \mathrm{d}o(x, y, z),$$

wobei $n(x, y, z)$ das Einheitsnormalenfeld der Menge M bezeichnet, welches in die *positive* z-Richtung zeigt.

Hinweis: Das Integral I_1 wird erst durch eine Laufrichtung eindeutig definiert. Per Definition muss der Rand ∂M positiv orientiert sein (im positiven Sinne durchlaufen werden), was wiederum von der Wahl eines äußeren Normalenfeldes der Menge M abhängt. Verwendet man in der gestellten Aufgabe ein rechtshändiges Koordinatenssystem, so ist der Rand ∂M (bzgl. dem angegebenen Vektorfeld n) positiv orientiert, wenn er gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen wird. In diesem Fall ist dann $I_1 = I_2$.

Zusatz: Machen Sie sich den Zusammenhang zwischen Laufrichtung/Orientierung des Randes ∂M und der Wahl des Normalenfeldes n explizit klar, und überlegen Sie sich, dass der oben gegebene Hinweis zutrifft.

Universität Stuttgart

PD Dr. Wolf-Patrick Düll
Insitut für Analysis, Dynamik
und Modellierung

Aufgabe 7.3 Sei $Q > 0$. Auf $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ betrachten wir das Vektorfeld

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{pmatrix} := \frac{Q}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, dass F auf dem Definitionsbereich die Gleichung $\frac{\partial F_2(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y} = 0$ erfüllt.

(b) Sei $\partial B_r \subset \mathbb{R}^2$ der Rand des zwei-dimensionalen Kreises mit radius $r > 0$ um den Punkt $(0,0)$. Zeigen Sie, dass $2\pi Q = \int_{\partial B_r} < F(x,y), (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)^T >$.

(c) Erklären Sie, warum die Ergebnisse aus (a) und (b) nicht im Widerspruch zum Integralsatz von Green stehen.

Alle Aufgaben auf diesem Blatt werden am
Dienstag, den 12.12.2017
in der Vortragsübung besprochen.