Universität Stuttgart

PD Dr. Wolf-Patrick Düll
Insitut für Analysis, Dynamik
und Modellierung

Analysis 3
Vorlesung im Wintersemester 2017/2018

Vortragsübungsblatt 8

Aufgabe 8.1 Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein lineares Vektorfeld mit $F(x) = Ax$.

a) Berechnen Sie $\mathrm{div} F$ und $\mathrm{rot} F$.

b) Bestimmen Sie zwei Matrizen $B, C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so dass

$$F(x) = Bx + Cx, \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^3,$$

mit Bx *quellenfrei* (d.h. $\mathrm{div}(Bx) = 0$) und Cx *wirbelfrei* (d.h. $\mathrm{rot}(Cx) = 0$).

c) Bestimmen Sie ein Vektorfeld $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und eine Funktion $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, so dass

$$F(x) = \mathrm{rot} V(x) + \mathrm{grad} \Phi(x), \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^3.$$

Aufgabe 8.2 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u_n : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Folge von harmonischen Funktionen, welche lokal gleichmäßig gegen eine Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ konvergiert. D.h. für jede kompakte Teilmenge $K \subset \Omega$ gilt

$$\sup_{x\in K} \big| u(x) - u_n(x) \big| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Zeigen Sie, dass die Grenzfunktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ harmonisch ist.

Aufgabe 8.3 (Harnack-Ungleichung) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion in Ω mit $u(x) \geq 0$ für alle $x \in \Omega$. Sei außeredem $V \subset \Omega$ eine offene, zusammenhängende Teilmenge mit $\overline{V}$ kompakt und $\overline{V} \subset \Omega$. Zeigen Sie, dass dann eine positive Konstante $C = C(V)$ existiert (welche nur von V abhängt!), so dass

$$\sup_{x\in V} u(x) \leq C \inf_{x\in V} u(x).$$

Bemerkung: Die Aussage ist, dass man für gegebenes V eine Konstante C finden kann, so dass die Ungleichung für *alle* nichtnegativen, harmonischen Funktionen in Ω gilt.

Alle Aufgaben auf diesem Blatt werden am
Dienstag, den 19.12.2017
in der Vortragsübung besprochen.