Universität Stuttgart

PD Dr. Wolf-Patrick Düll
Insitut für Analysis, Dynamik
und Modellierung

Analysis 3
Vorlesung im Wintersemester 2017/2018

Vortragsübungsblatt 12

Aufgabe 12.1 Zeigen Sie, dass für Matrizen $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\det\bigl(e^{zA}\bigr) = e^{z\mathrm{Spur}(A)}.$$

Aufgabe 12.2 Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

für komplexwertige Funktionen $y_1(t)$, $y_2(t)$ ($t \in \mathbb{R}$). Verwenden Sie die Matrixexponentialfunktion zur Lösung des Anfangswertproblems mit

a) $(y_1(0), y_2(0)) = (1, i)$,

b) $(y_1(0), y_2(0)) = (1, 0)$.

Aufgabe 12.3 Lösen Sie die Anfangswertprobleme aus Aufgabe 11.3 mithilfe der Matrixexponentialfunktion (d.h. verwenden Sie, dass $y(t) = e^{tA}y(0)$ Lösung der Gleichung $y'(t) = Ay(t)$ ist).

Aufgabe 12.4 Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$y' = (1 + x)(1 + y), \quad y(x_0) = y_0$$

eine global eindeutige Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt.

Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst eine Funktion, die das Anfangswertproblem auf ganz $\mathbb{R}$ löst. Verwenden Sie dann den Satz von Picard-Lindelöf, um zu zeigen, dass es keine weitere Lösung $\tilde{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ geben kann.

Alle Aufgaben auf diesem Blatt werden am
Dienstag, den 30.01.2018
in der Vortragsübung besprochen.