Votieraufgaben

1 Sind $\varphi\colon \Omega \to \Omega'$ und $\psi\colon \Omega' \to \Omega''$ Diffeomorphismen, so sind

$$\varphi^{-1}\colon \Omega' \to \Omega, \qquad \psi \circ \varphi\colon \Omega \to \Omega''$$

ebenfalls Diffeomorphismen.

2 Ist $\varphi\colon \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ von der Klasse C^r, $r \geqslant 1$, und lokal um x_0 stetig differenzierbar umkehrbar, so ist auch die lokale Umkehrfunktion φ^{-1} von der Klasse C^r.

3 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beliebig, aber nicht leer, sei $x_0 \in \Omega$, und für $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ sei

$$[f]_\Omega = \sup_{\substack{u \neq v \\ u,v \in \Omega}} \frac{|f(u) - f(v)|}{|u - v|}.$$

Dann gilt:

a. $L \coloneqq \{f \in C(\Omega, \mathbb{R}^n) : f(x_0) = 0,\ [f]_\Omega < \infty\}$ ist ein reeller Vektorraum.
b. $[\cdot]_\Omega$ definiert auf L eine Norm.
c. Mit dieser Norm ist L vollständig.
d. Unter welchen Umständen sind alle Funktionen in L beschränkt?

4 Sei $\varphi\colon \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 mit $\varphi(0) = 0$ und $D\varphi(0) = 0$. Sei φ_ε definiert durch

$$\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1}\varphi(\varepsilon x).$$

Dann ist

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{C^1(B_1)} \coloneqq \|\varphi_\varepsilon\|_{B_1} + \|D\varphi_\varepsilon\|_{B_1} = O(\varepsilon),$$

wobei $\|\cdot\|_{B_1}$ die Supremumsnorm über die Einheitskugel (in einer beliebigen Norm) bezeichnet.

"So, then....Would that be 'us the people' or 'we the people'?"

Votieraufgaben

5 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und nicht leer, und $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ sei stetig differenzierbar.
a. Ist φ regulär, so ist φ eine *offene Abbildung*. Das heißt, das Bild jeder offenen Menge unter φ ist ebenfalls offen.
b. Geben Sie ein Beispiel, dass die Regularität von φ hinreichend, aber nicht notwendig ist.

6 *a.* Untersuchen sie die Abbildung

$$\varphi : (x, y) \mapsto (e^x \cos y, e^x \sin y)$$

auf Regulärität und Umkehrbarkeit. Geben Sie gegebenfalls auch die Umkehrabbildung an.
b. Welche Abbildung erhält man, wenn man φ im Komplexen schreibt?

7 Untersuchen sie die Abbildung

$$\psi : (u, v) \mapsto (\cosh u \cos v, \sinh u \sin v)$$

auf Regulärität und Umkehrbarkeit.

Schriftaufgabe

8 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex und $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Ist φ regulär und $D\varphi + D\varphi^\top > 0$ auf Ω, so ist φ ein Diffeomorphismus von Ω auf $\varphi(\Omega)$.

"Seven days at sea...but thank God no one's seen us!"

Votieraufgaben

9 Zeigen sie, dass es eine Funktion $\varphi \in C^\infty(I)$ mit $I = (-\varepsilon, \varepsilon)$ und $\varphi(0) = 0$ gibt, die die Gleichung

$$x\varphi^2(x) + 2x^2 e^{\varphi(x)} = \varphi(x)$$

erfüllt. Bestimmen sie außerdem $\varphi'(0)$.

10 Sei $\varphi\colon \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar mit $\det Df(x_0) \neq 0$. Beweisen sie den Umkehrsatz mithilfe des Satzes über implizite Funktionen, indem sie die Hilfsfunktion

$$\varphi(x, y) = f(x) - y$$

betrachten.

11 Beweisen sie für die Abbildung φ^{-1} von Proposition C die Lipschitzabschätzung

$$[\varphi^{-1} - id]_V \leqslant \frac{\lambda}{1-\lambda}, \qquad \lambda = [\varphi - id]_A.$$

12 *a.* Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex und $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ C^2. Gilt

$$Hu > 0$$

auf ganz Ω, so definiert $f = \nabla u$ einen Diffeomorphismus von Ω auf $f(\Omega)$.
b. Gilt außerdem

$$Hu \geqslant \lambda E$$

auf ganz Ω mit einem $\lambda > 0$, so gilt außerdem

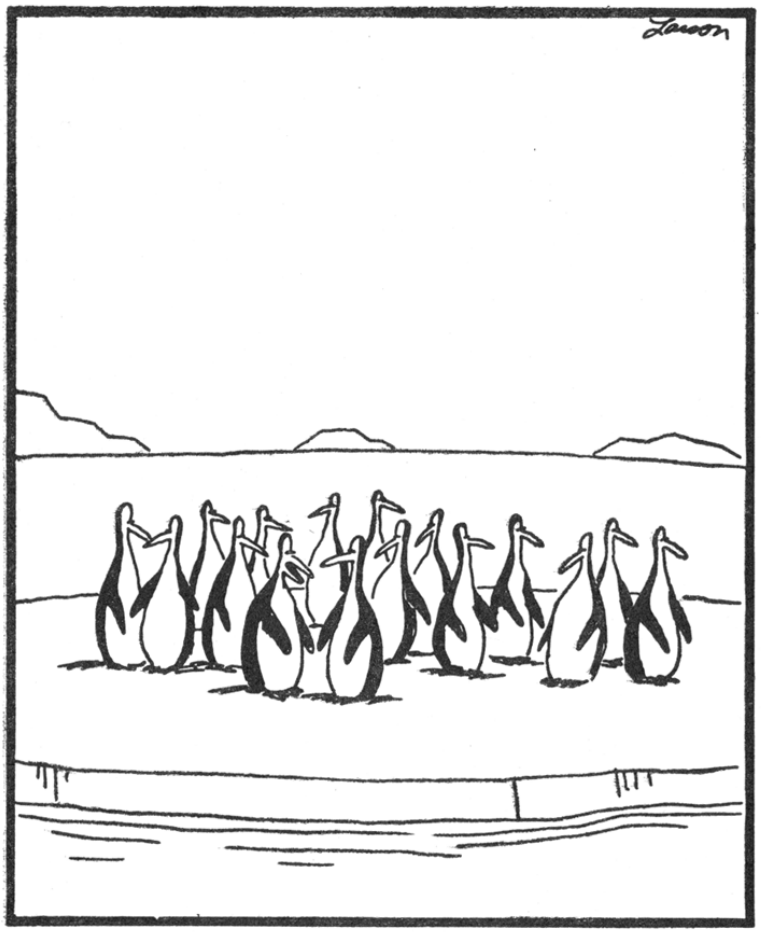
$$|f(x) - f(y)| \geqslant \lambda |x - y|, \qquad x, y \in \Omega.$$

Schriftaufgabe

13 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Gilt

$$|f(x) - f(y)| \geqslant \lambda |x - y|, \qquad x, y \in \Omega, \tag{†}$$

mit einem $\lambda > 0$, so ist f ein Diffeomorphismus auf $f(\Omega)$.



"Well, that's an interesting bit of trivia —
I guess I *do* only dream in black and white."

Votieraufgaben

14 *a.* $\mathbb{Z}$ ist eine Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}$.
b. Ebenso die Menge $M = \{1/n : n \geqslant 1\}$.
c. Nicht aber $M' = M \cup \{0\}$.

15 Zeichnen sie eine Auswahl typischer Niveaumengen zu

a. $x^4 - 4x^2 + y^2$ *b.* $x^2 e^{-x} + y^2$.

Welche davon sind Mannigfaltigkeiten? Welches sind die kritischen Werte?

16 Gegeben ist

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2x^2 + 2y^2 + 1.$$

Für welche $c \in \mathbb{R}$ ist $f^{-1}(c)$ eine Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^2$?

17 *a.* Sind M und N Mannigfaltigkeiten in $\mathbb{R}^p$ respektive $\mathbb{R}^q$, so ist $M \times N$ eine Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$.
b. Was ist die Dimension und Kodimension von $M \times N$?

18 Die spezielle orthogonale Gruppe

$$SO(n) = \{M \in \mathbb{R}^{n\times n} : M^\top M = I \wedge \det M = 1\}$$

ist eine wegzusammenhängende Mannigfaltigkeit.

Schriftaufgabe

19 Sei M eine Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$ der Kodimension m. Dann existiert zu jedem $p \in M$ eine Umgebung W und ein lokaler Diffeomorphismus $\varphi\colon W \to \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m$, so dass

$$\varphi(M \cap W) \subset \mathbb{R}^{n-m} \times \{0\}.$$

Man sagt, der Diffeomorphismus φ *trivialisiert* die Mannigfaltigkeit, da ein Ausschnitt diffeomorph auf einen Ausschnitt des $\mathbb{R}^{n-m}$ abgebildet wird.

"See how the vegetation has been trampled flat here, Jimmy? That tells me where deer bedded down for the night. After a while, you'll develop an eye for these things yourself."

Votieraufgaben

20 Bestimmen sie die Extrema der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y,z) = xyz$$

unter den Nebenbedingungen
a. $x^2 + y^2 + z^2 = 3$,
b. $x + y + z = 5$ und $xy + yz + zx = 8$.

21 Bestimmen sie die Maxima der Funktion

$$f(x,y,z) = xy^2z^3, \qquad x,y,z > 0,$$

unter der Nebenbedingung $x + 2y + 3z = 6$.

22 Welche Punkte auf der Fläche $z = 2xy + 1$ liegen dem Nullpunkt am nächsten?

23 Zeigen Sie, dass von allen Vierecken mit gegebenen Seitenlängen diejenigen den größten Flächeninhalt haben, deren gegenüberliegende Winkel sich zu π addieren. *Anmerkung:* In diesem Fall liegen die Ecken eines Vierecks auf einem Kreis – es handelt sich um ein sogenanntes *Sehnenviereck*.

Schriftaufgabe

24 Unter den Dreiecken, deren Ecken auf dem Einheitskreis liegen, haben die gleichseitigen Dreiecke den größten Flächeninhalt.

Zorg dupes the entire tribe in an incident later known in prehistory books as "firegate."

Votieraufgaben

25 Für eine Menge $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ sind folgende Aussagen äquivalent.
a. Λ ist diskret, also abgeschlossen ohne Häufungspunkte.
b. Λ ist abgeschlossen, und jeder Punkt in Λ ist ein isolierter Punkt.
c. Für jede kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ ist $K \cap \Lambda$ endlich.

26 Eine durch eine diskrete Masseverteilung m gegebene Intervallfunktion ist regulär.

27 Beweisen sie folgende Behauptungen:
a. Jede endliche, oder abzählbare Menge ist eine λ-Nullmenge.
b. Insbesondere ist $\mathbb{Q}$ eine λ-Nullmenge in $\mathbb{R}$.
c. Jedes entartete Intervall ist eine λ-Nullmenge.
d. Jede Hyperebene ist eine λ-Nullmenge.
e. Der Graph einer stetigen Funktion $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist eine λ-Nullmenge in $\mathbb{R}^{n+1}$.

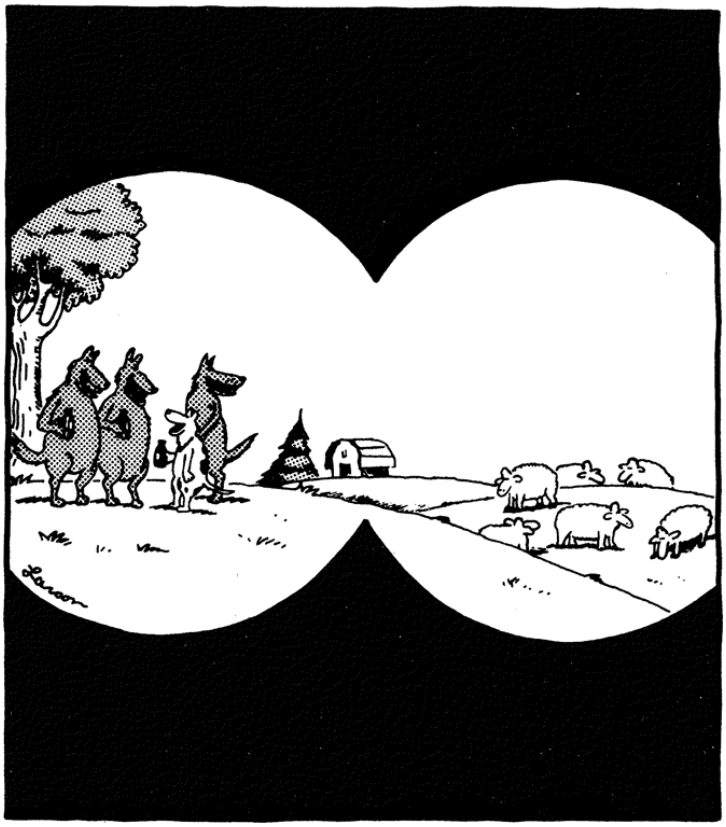
28 Jede offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist die disjunkte Vereinigung abzählbar vieler beschränkter Intervalle.

29 Sei μ ein Maß und N eine μ-Nullmenge. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ auch eine Überdeckung von N durch *offene* Intervalle $I_1, I_2, ..$ so, dass

$$\sum_{k \geqslant 1} \mu(I_k) < \varepsilon.$$

Schriftaufgabe

30 Eine nichtnegative stetige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist der *gleichmäßige* Limes einer steigenden Folge von nichtnegativen Treppenfunktionen.



Everything was starting to come into focus for Farmer MacDougal — his missing sheep, his missing beer, and his collie, Shep, who was getting just a little too sociable for his own good.

Votieraufgaben

31 Seien $(f_k), (g_k)$ zwei monoton steigende Folgen beliebiger Funktionen auf $\mathbb{R}^n$. Dann sind auch

$$u_k = \min(f_k, g_k), \qquad \nu_k = \max(f_k, g_k)$$

monoton steigende Funktionenfolgen.

32 Sei $f =_\mu u - \nu$ eine zulässige Darstellung. Gilt $f \geqslant_\mu 0$ und $I_\mu(\nu) < \infty$, so existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ auch eine zulässige Darstellung

$$f = \tilde{u} - \tilde{\nu}, \qquad I_\mu(\tilde{\nu}) < \varepsilon.$$

33 Ist $f \in C(\mathbb{R})$ nichtnegativ, so ist f λ-monoton approximierbar.

34 Man konstruiere eine Familie offener Intervalle $(I_k)_{k\geqslant 1}$ in $[0,1]$ derart, dass $I = \bigcup_{k\geqslant 1} I_k$ dicht in $[0,1]$ ist und

$$\sum_{k\geqslant 1} |I_k| < 1.$$

Dann ist die charakteristische Funktion von $[0,1] \setminus I$ nicht λ-monoton approximierbar.

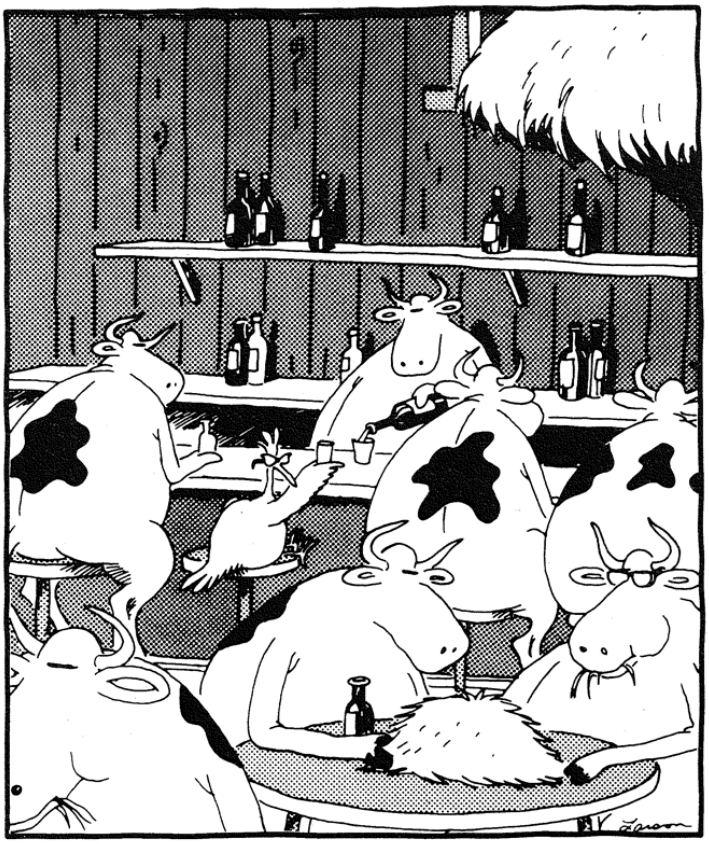
35 Sei $f, g \in \mathcal{U}^n(\mu)$. Gilt $\sup(I_\mu(f), I_\mu(g)) < \infty$, so gilt auch $I_\mu(\sup(f,g)) < \infty$.

Schriftaufgabe

36 Sei $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und nichtnegativ. Dann gilt

$$I_\mu(u) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\,\mathrm{d}t,$$

wobei auf der rechten Seite das uneigentliche Cauchyintegral gemeint ist. Das gilt auch für den Wert ∞.



Vera looked around the room. Not another chicken anywhere. And then it struck her — this was a hay bar.

Votieraufgaben

37 *Allgemeines Lemma von Fatou* Sei (f_k) eine beliebige Folge integrierbarer Funktionen. Existiert eine integrierbare Funktion g, so dass $f_k \leqslant g$ für alle k, so ist auch $\varphi = \sup f_k$ integrierbar, und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi \,\mathrm{d}\mu \geqslant \limsup \int_{\mathbb{R}^n} f_k \,\mathrm{d}\mu.$$

Existiert eine integrierbare Funktion h, so dass $f_k \geqslant h$ für alle k, so ist auch $\psi = \inf f_k$ integrierbar, und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi \,\mathrm{d}\mu \leqslant \liminf \int_{\mathbb{R}^n} f_k \,\mathrm{d}\mu.$$

38 *Tschebyscheffsche Ungleichung* Für $f \in \mathcal{M}_s^n(\mu)$ mit $f \geqslant 0$ gilt

$$\mu(\{f \geqslant \alpha\}) \leqslant \frac{1}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} f \,\mathrm{d}\mu, \qquad \alpha > 0.$$

39 Es seien $f, g \in \mathcal{M}^n(\mu)$. Ist f beschränkt und g integrierbar, so ist auch fg integrierbar, und es gilt

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} fg \,\mathrm{d}\mu \right| \leqslant \sup_{\mathbb{R}^n} |f| \int_{\mathbb{R}^n} |g| \,\mathrm{d}\mu.$$

40 *Elementare Transformationsformeln* Sei $f \in \mathcal{L}^n(\mu)$. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(u-h) \,\mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}^n} f(u) \,\mathrm{d}u$$

für alle $h \in \mathbb{R}^n$ sowie

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(Au) \,\mathrm{d}u = |\det A|^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} f(u) \,\mathrm{d}u$$

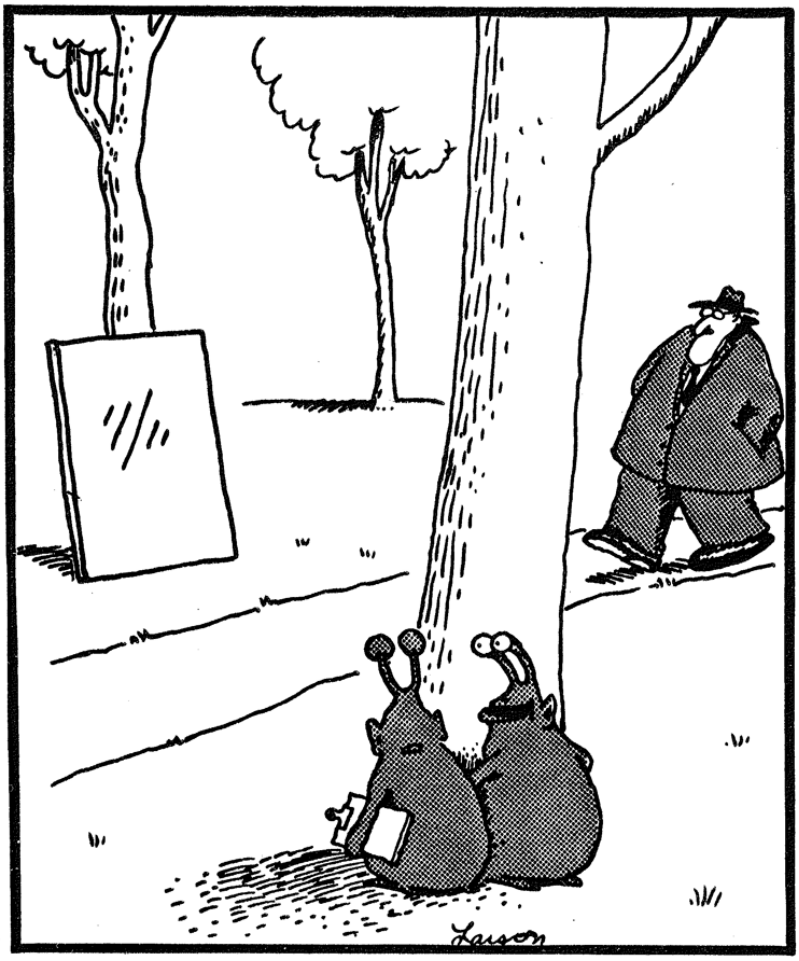
für $A = \operatorname{diag}(a_1, .., a_n)$ regulär. *Hinweis:* Betrachte zuerst charakteristische Funktionen von Intervallen.

Schriftaufgabe

41 Sei $f \in \mathcal{L}^n(\mu)$ mit $f > 0$ μ-fast überall. Dann gilt

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu > 0$$

für jede messbare Menge A mit $\mu(A) > 0$.



"And now we'll see if it attacks its own reflection."

Votieraufgaben

42 Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(u,v) = \frac{uv}{u^2+v^2}, \qquad (u,v) \neq (0,0),$$

und $f(0,0) = 0$. Dann ist

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = 0 = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(u,v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u.$$

Trotzdem ist f nicht integrierbar.

43 Ist $f\colon [a,b]^2 \to \mathbb{R}$ stetig, so gilt

$$\int_a^b \int_u^b f(u,v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = \int_a^b \int_a^v f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

44 Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion. Beweisen sie das Lemma von Schwarz,

$$(f_x)_y = (f_y)_x,$$

mithilfe des Satzes von Fubini.

45 Sind I, J n-Intervalle, so ist χ mit $\chi(u,v) = \chi_I(u-v)\chi_J(v)$ die charakteristische Funktionen eines messbaren Menge A in $\mathbb{R}^{n+n}$.

46 Sei $\mathcal{T}$ eine Zerlegung der Eins auf einer Menge M in $\mathbb{R}^n$.
a. Ist M die Vereinigung abzählbar vieler kompakter Mengen, so ist $\mathcal{T}$ höchstens abzählbar, wenn man Null-Funktionen nicht mitzählt.
b. Ist M offen und $\mathcal{T}$ der trivialen Überdeckung $\mathcal{O} = \{M\}$ untergeordnet, so ist $\mathcal{T}$ abzählbar *unendlich* – also *nicht* endlich.

47 Sei $f\colon [a,b] \to [0,\infty)$ stetig und

$$A_f = \{(x,y) : a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}.$$

Dann ist A_f messbar und $\lambda(A_f) = \int_a^b f$.

Schriftaufgabe

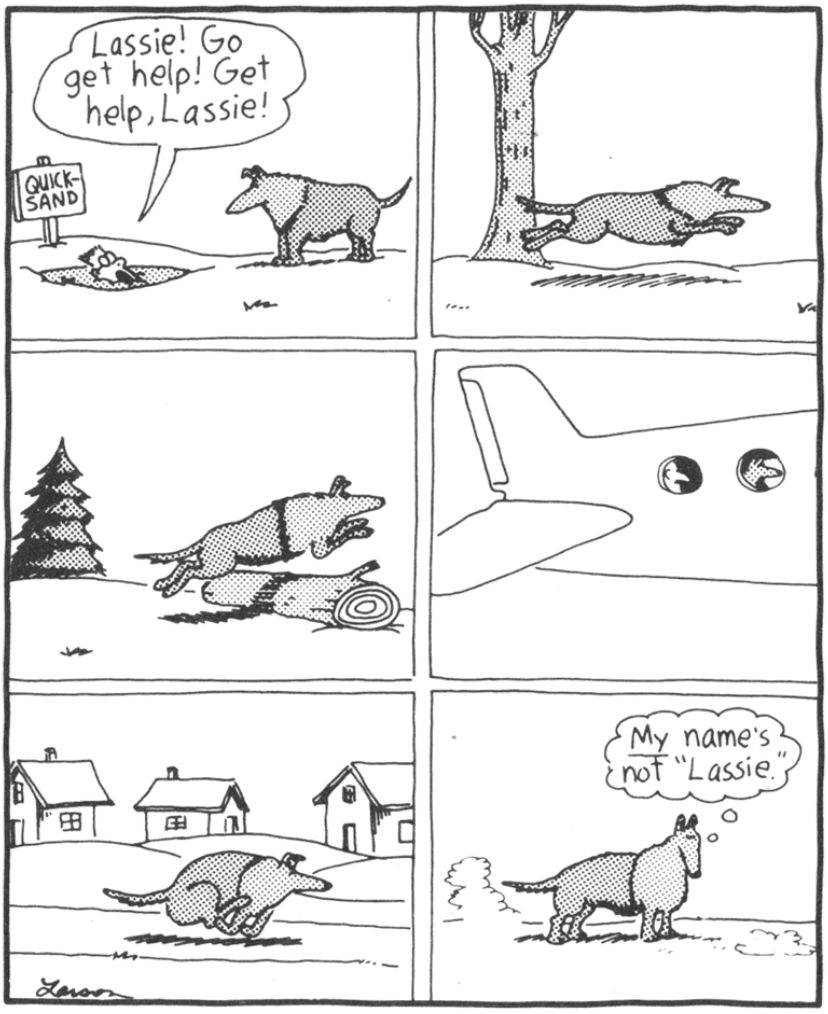
48 *a.* Sei $\rho = \operatorname{diag}(-1,1..,1)$ die Reflexion in der ersten Koordinate. Mit den Voraussetzungen der Transformationformel A-?? gilt dann

$$\int_\Omega (f\circ\varphi)\,|\det D\varphi|\,\mathrm{d}\lambda = -\int_{\rho(\Omega)} (f\circ\varphi\circ\rho)\,|\det D\varphi|\,\mathrm{d}\lambda.$$

b. Gilt $\det D\varphi < 0$ auf Ω, so folgt

$$\begin{aligned}\int_\Omega (f\circ\varphi)\,|\det D\varphi|\,\mathrm{d}\lambda \\ = \int_{\rho(\Omega)} (f\circ(\varphi\circ\rho)\det D(\varphi\circ\rho)\,\mathrm{d}\lambda = \int_{\varphi(\Omega)} f\,\mathrm{d}\lambda\end{aligned}$$

mit der bereits bewiesenen Transformationsformel für positive Determinanten.


Lassie! Go get help! Get help, Lassie!
QUICK-SAND
My name's not "Lassie."
Larson

Votieraufgaben

49 Für messbare Mengen M_1 und M_2 gilt

$$\mu(M_1) + \mu(M_2) = \mu(M_1 \cup M_2) + \mu(M_1 \cap M_2).$$

50 Bestimmen Sie das Volumen des durch Rotation von $\{(x,y) : x^2/a^2 + y^2/b^2 \leqslant 1\}$ um die x-Achse entstehenden Ellipsoids.

51 Man bestimme das Volumen des *Vivianischen Körpers*, der als Schnittmenge der Einheitskugel mit dem Zylinder $Z = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 \leqslant x\}$ entsteht.

52 *Erste Guldinsche Regel* Der Körper R_M entstehe durch Rotation einer abgeschlossenen, in der rechten Halbebene liegenden abgeschlossenen Menge M um die y-Achse. Dann gilt für sein Volumen

$$|R_M| = 2\pi \int_M x \, \mathrm{d}\lambda_2 = 2\pi r \, |M|$$

mit

$$r = \frac{1}{|M|} \int_M x \, \mathrm{d}\lambda_2,$$

dem Abstand des Schwerpunktes von M von der y-Achse.
Das Volumen eines Rotationskörpers ist also das Produkt aus dem Flächeninhalt eines Meridianschnitts und der Weglänge, den sein Schwerpunkt bei einer Umdrehung zurücklegt.

Schriftaufgabe

53 Sei $f \in \mathcal{L}^n(\mu))$. Sind A und B μ-messbare Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, so gilt

$$\left| \int_A f \, \mathrm{d}\mu - \int_B f \, \mathrm{d}\mu \right| \leqslant \int_{A \cup B} |f| \, \mathrm{d}\mu.$$

When the monster came, Lola, like the peppered moth and the arctic hare, remained motionless and undetected. Harold, of course, was immediately devoured.

Votieraufgaben

54 Seien ω und υ Differenzialformen von geradem Grad, σ von beliebigem Grad. Man berechne die äußeren Ableitungen von
a. $\mathrm{d}\omega \wedge \upsilon - \omega \wedge \mathrm{d}\upsilon$,
b. $\mathrm{d}\omega \wedge \upsilon \wedge \sigma + \omega \wedge \mathrm{d}\upsilon \wedge \sigma + \omega \wedge \upsilon \wedge \mathrm{d}\sigma$.

55 Auf dem $\mathbb{R}^4$ seien

$$\omega = \mathrm{d}x_1 + x_2\,\mathrm{d}x_2, \qquad \upsilon = \sin x_2\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 + \cos x_3\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_4.$$

Außerdem sei $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, x_3 x_4, x_4)$. Man bestimme
a. $\mathrm{d}\omega$ und $\mathrm{d}\upsilon$ *b.* $\sigma = \omega \wedge \upsilon$ *c.* $\varphi^*\sigma$ *d.* $\mathrm{d}\sigma$ und $\mathrm{d}(\varphi^*\sigma)$.

56 Für $\omega = \sum_{k<l} a_{kl}\,\mathrm{d}x_k \wedge \mathrm{d}x_l$ ist

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{k<l<m} (a_{kl,m} + a_{lm,k} + a_{mk,l})\,\mathrm{d}x_k \wedge \mathrm{d}x_l \wedge \mathrm{d}x_m.$$

57 Jedem Vektorfeld $v = (v_1, v_2, v_3)\colon \mathbb{R}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ seien die beiden Formen

$$\omega^1_v \coloneqq v_1\,\mathrm{d}x + v_2\,\mathrm{d}y + v_3\,\mathrm{d}z,$$
$$\omega^2_v \coloneqq v_1\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + v_2\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + v_3\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

zugeordnet. Außerdem sei $f\colon \mathbb{R}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}$ eine skalare Funktion.
a. Zeigen sie, dass

$$\mathrm{d}f = \omega^1_{\nabla f},$$
$$\mathrm{d}\omega^1_v = \omega^2_{\nabla \times v},$$
$$\mathrm{d}\omega^2_v = (\nabla \bullet v)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z.$$

b. Folgern sie, dass

$$\nabla \times (\nabla f) = 0, \qquad \nabla \bullet (\nabla \times v) = 0.$$

c. Falls $\nabla \times v = 0$ auf einem sternförmigen Gebiet A, so ist $v = \nabla f$ mit einer skalaren Funktion f auf A.
d. Falls $\nabla \bullet v = 0$ auf einem sternförmigen Gebiet A, so ist $v = \nabla \times w$ mit einem Vektorfeld w auf A.

Schriftaufgabe

58 Mit der Kugelkoordinatenabbildung $\varphi\colon (r, \varphi, \theta) \mapsto (x, y, z)$ berechne man
a. $\varphi^*\,\mathrm{d}x$, $\varphi^*\,\mathrm{d}y$, $\varphi^*\,\mathrm{d}z$ *b.* $\varphi^*(\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z)$ *c.* $\varphi^*\,\mathrm{d}x \wedge \varphi^*(\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z)$.

The livestock would gather every morning, hoping for one of Farmer Dan's popular "airplane" rides.

Votieraufgaben

59 *a.* Zeigen sie, dass es zu jeder n-Form $\omega \neq 0$ eine n-Kette c gibt, so dass

$$\int_c \omega \neq 0.$$

b. Benutzen sie dies, den Satz von Stokes und $\partial \circ \partial = 0$, um $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$ zu zeigen.

60 Sei $\varphi\colon [0,1]^n \to [0,1]^n$ eine stetig differenzierbare Bijektion mit $\det D\varphi \geqslant 0$ überall. Für jeden n-Würfel c und jede n-Form ω gilt dann

$$\int_c \omega = \int_{c\circ\varphi} \omega.$$

61 Formulieren und beweisen sie auf elementare Weise den Satz von Stokes für folgende Integrale.

a. $\int_{\partial I^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ *b.* $\int_{\partial I^3} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$ *c.* $\int_{I^2} (g_x - f_y)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$

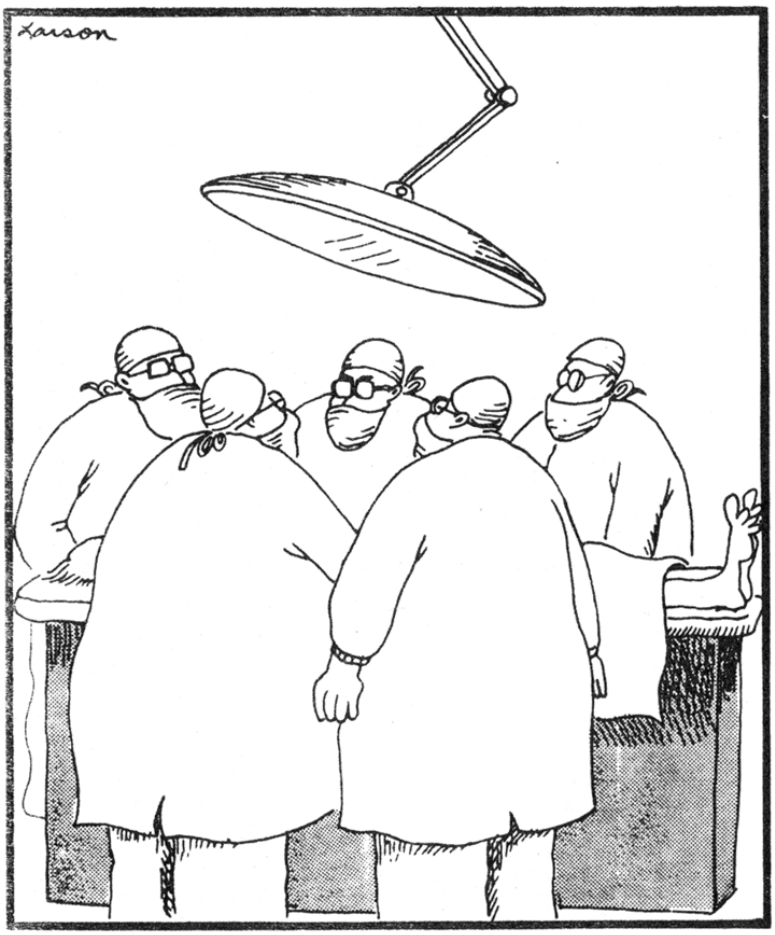
Schriftaufgabe

62 Seien $g,h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $g \leqslant h$ und

$$N = \{(u,v) : a \leqslant u \leqslant v \wedge g(u) \leqslant v \leqslant h(u)\}.$$

Für eine C^1-Funktion $f\colon N \to \mathbb{R}$ verifiziere man auf elementare Weise, dass

$$\int_{\partial N} f\,\mathrm{d}u = -\int_N f_v\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$



"OK, Williams, we'll vote . . . how many here say the heart has four chambers?"

Votieraufgaben

63 *a.* Sei M^2 eine kompakte zweidimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand im $\mathbb{R}^2$. Sind die Funktionen u und v in einer Umgebung von M^2 differenzierbar, so gilt

$$\int_{M^2} (v_x - u_y)\,\mathrm{d}\lambda = \int_{\partial M^2} (u\,\mathrm{d}x + v\,\mathrm{d}y).$$

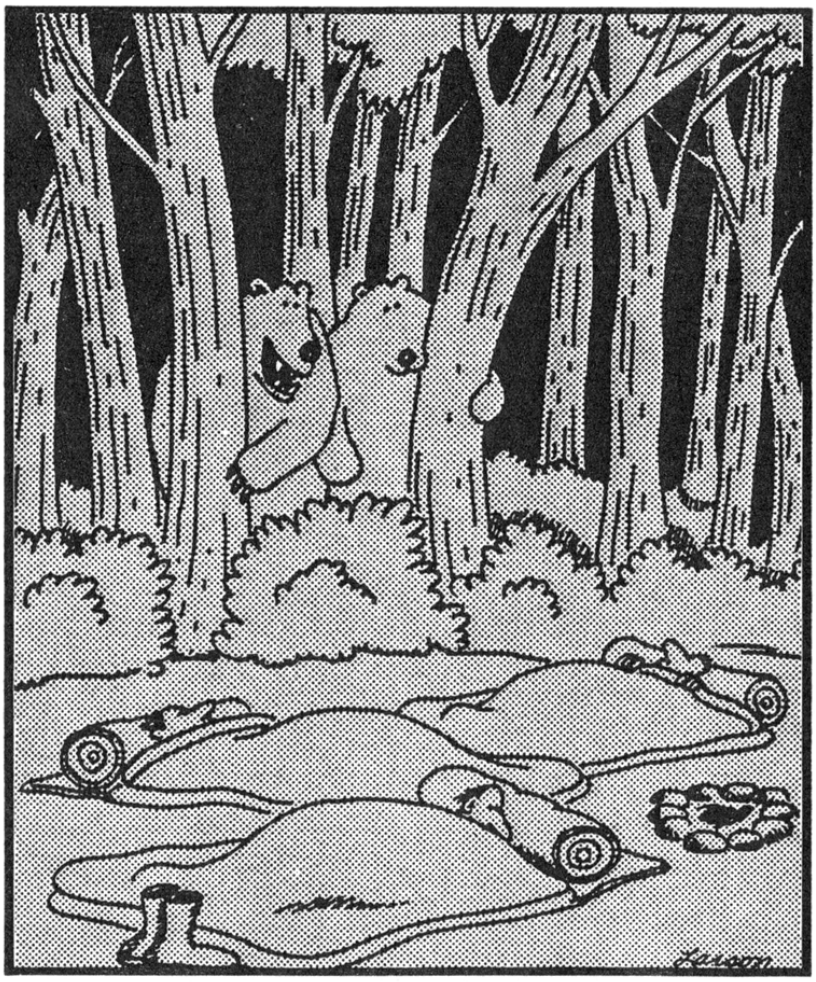
b. Ist A ein regulär berandetes Gebiet, so ist dessen Flächeninhalt

$$|A| = \frac{1}{2}\int_{\partial A} (x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x).$$

64 Zeigen sie, dass auf jeder orientierten 2-Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^3$ in differenzierbarer Weise eine äußere Normale definiert werden kann.

65 Besitzt eine Hyperfläche M im $\mathbb{R}^3$ eine stetige Normalenfunktion, so ist M orientierbar.

66 Gibt es auf einer n-Mannigfaltigkeit M eine nirgends verschwindende n-Form, so ist M orientierbar.



"Sandwiches!"

Votieraufgaben

67 *a.* Für eine $n-1$-Form ω auf einer kompakten n-Mannigfaltigkeit M gilt immer

$$\int_M \mathrm{d}\omega = 0.$$

b. Geben sie ein nicht-kompaktes Beispiel, wo dies nicht zutrifft.

■ *Lösung*

a. Der Rand der Mannigfaltigkeit M ist leer. Mit dem Satz von Stokes gilt daher

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_{\partial M} \omega = \int_\varnothing \omega = 0.$$

b. Mit $M = \mathbb{R}$ und $\omega = f$ eine 0-Form kann

$$\int_M \mathrm{d}f = \lim_{r\to\infty} f\Big|_{-r}^{r}$$

bei geeigneter Wahl von f jeden beliebigen Wert annehmen. ■

68 Verallgemeinern sie den Divergenzsatz auf eine berandete n-Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$, indem sie einem Vektorfeld $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine geeignete $n-1$-Form ω_F zuordnen. Drücken sie damit den Inhalt von $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ durch den Inhalt von $\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leqslant 1\}$ aus.

■ *Lösung*

a. Einem Vektorfeld $\nu = (\nu_1, .., \nu_n)$ ordne man die $n-1$-Form

$$\omega_\nu^{n-1} := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \nu_i \,\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\hat{x}_i \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n$$

zu. Für $n = 3$ stimmt dies mit unseren früheren Definition von ω_ν^3 überein. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega_\nu^{n-1} &= \sum (-1)^{i-1} \frac{\partial \nu_i}{\partial x_i} \,\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\hat{x}_i \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n \\
&= \sum_i (-1)^{i-1}(-1)^{i-1} \frac{\partial \nu_i}{\partial x_i} \,\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n \\
&= (\operatorname{div} \nu)\,\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n.
\end{aligned}$$

Also gilt

$$\int_M \operatorname{div} \nu \,\mathrm{d}V = \int_{\partial M} \omega_\nu^{n-1}.$$

b. Das Flächenelement auf der n-Sphäre ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}A &= x_1 \,\mathrm{d}x_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n \\
&\quad + (-1)^1 x_2 \,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}\hat{x}_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n + .. \\
&= \omega_x^{n-1},
\end{aligned}$$

denn dies ist genau die Entwicklung der n-dimensionalen Determinante nach dem Spaltenvektor x, der im Punkt x die Normale an $\mathbb{S}^{n-1}$ bildet. Also gilt

$$|\mathbb{S}^{n-1}| = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \omega_x^{n-1} = \int_{\partial\mathbb{B}^n} \omega_x^{n-1} = \int_{\mathbb{B}^n} \mathrm{d}\omega_x^{n-1} = n\int_{\mathbb{B}^n} \mathrm{d}V = n\,|\mathbb{B}^n|\,. \qquad \blacksquare$$

69 Seien M_1 und M_2 berandete n-Mannigfaltigkeiten im $\mathbb{R}^n$ mit der üblichen Orientierung, wobei

$$M_2 \subset M_1 \smallsetminus \partial M_1$$

und $M_1 \smallsetminus M_2$ beschränkt ist. Dann gilt

$$\int_{\partial M_1} \omega = \int_{\partial M_2} \omega$$

für jede geschlossene $n-1$-Form ω auf M_1.

■ *Lösung* Entfernen wir aus M_1 das Innere von M_2, so erhalten wir eine kompakte Mannigfaltigkeit M mit Rand $\partial M = \partial M_1 - \partial M_2$. Der Satz von Stokes für M ergibt dann

$$\int_{\partial M_1} \omega - \int_{\partial M_2} \omega = \int_{\partial M} \omega = \int_M \mathrm{d}\omega = 0.$$

Das ist die Behauptung. *Bemerkung:* Bei diesem Argument ist es nicht nötig, dass M_1 oder M_2 kompakt sind. ■

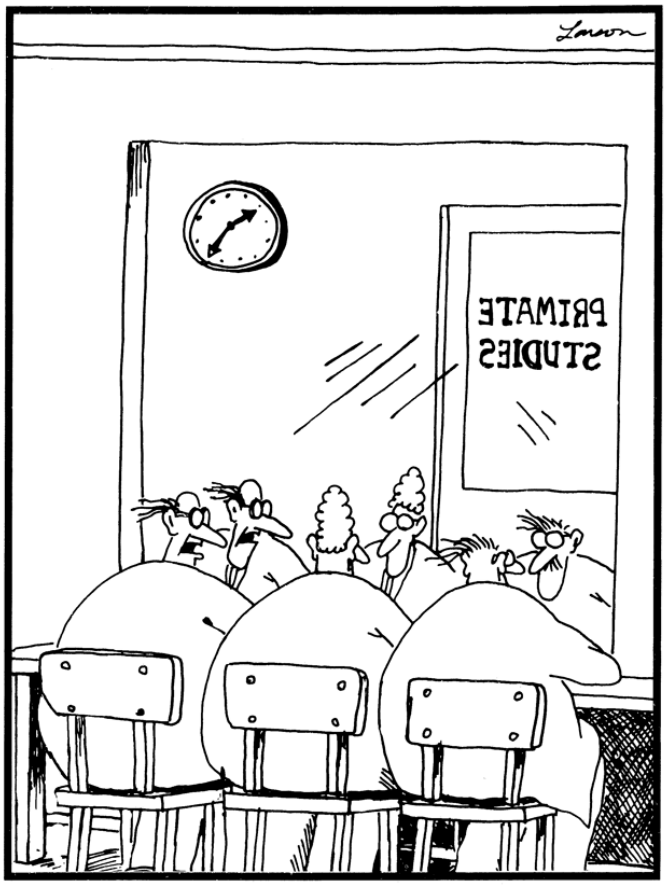
Schriftaufgaben

70 Man verifiziere den Divergenzsatz von Gauss für ein 3-dimensionales kompaktes Intervall I:

$$\int_I \operatorname{div} F\,\mathrm{d}V = \int_{\partial I} \langle F, n\rangle\,\mathrm{d}A.$$

Hinweis: Man kann jeden Term $\partial_i F_i\,\mathrm{d}V$ für sich betrachten.

71 Zeigen sie, dass jede geschlossene Differenzialform auf $\mathbb{S}^2$ exakt ist.



"For crying out loud, gentlemen! That's us! Someone's installed the one-way mirror in backward!"

Votieraufgaben

72 Approximieren sie einen Zylindermantel endlichen Maßes gleichmäßig durch Dreiecke mit Ecken auf diesem Mantel derart, dass der Gesamtflächeninhalt dieser Dreiecke gegen unendlich strebt.

73 Sei K eine kompakte, berandete Untermannigfaltigkeit von M und $\varphi\colon \partial K \to N$ eine differenzierbare Abbildung in eine n-Mannigfaltigkeit N.
a. Gibt es eine differenzierbare Abbildung $\Phi\colon K \to N$ mit $\Phi\,|\,\partial K = \varphi$, so gilt

$$\int_{\partial K} \varphi^* \omega = 0$$

für jede geschlossene $n-1$-Form ω auf N.
b. Sei $M = \mathbb{R}^m$ und $N = \partial K$. Dann gibt es keine differenzierbare Abbildung $\Phi\colon K \to \partial K$ mit $\Phi\,|\,\partial K = id$. Man sagt, *es gibt keine glatte Retraktion von K auf ∂K*.

74 *Zweite Guldinsche Regel* *Der Oberflächeninhalt einer Rotationsfläche beträgt $2\pi r l$, wobei l die Länge eines Meridianschnitts und r den Abstand seines Schwerpunkts von der Rotationsachse bezeichnet. Hinweis:* Vergleiche erste Guldinsche Regel.

75 Für $f, g \in L^p(\mu)$ und $0 < p < 1$ gilt

$$\|f+g\|_p^p \leqslant \|f\|_p^p + \|g\|_p^p,$$

aber für $\|\cdot\|_p$ gilt nicht die Dreiecksungleichung.

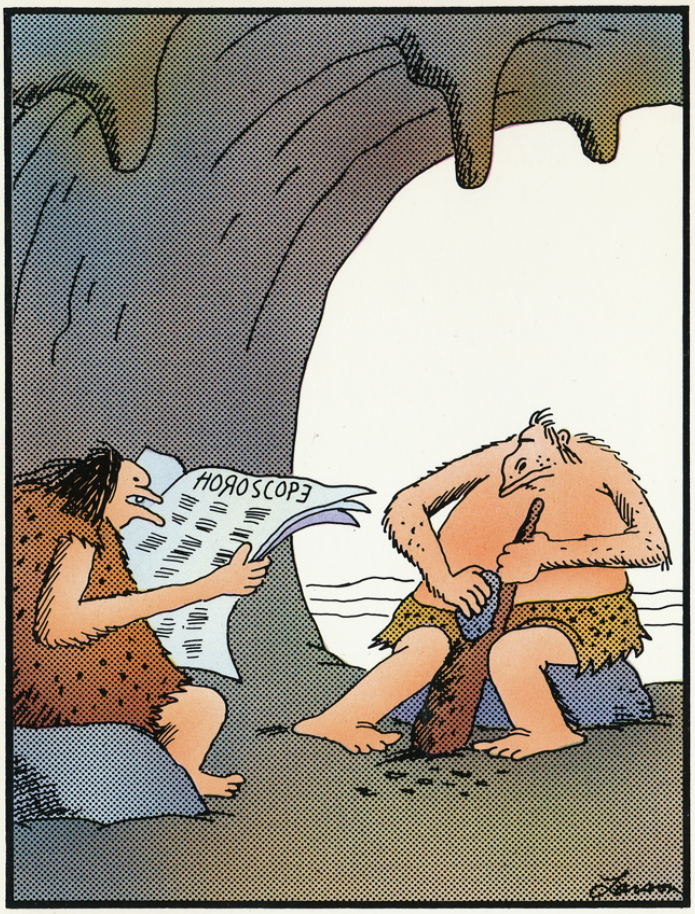
76 *Minkowskische Ungleichung in Integralform* Für $1 \leqslant p < \infty$ gilt

$$\left\{\int \left|\int f(x,y)\,\mathrm{d}x\right|^p \mathrm{d}y\right\}^{1/p} \leqslant \int \left\{\int |f(x,y)|^p\,\mathrm{d}y\right\}^{1/p} \mathrm{d}x.$$

Hinweis: Schätzen sie die p-te Potenz auf der linken Seite ab durch

$$\left(\int |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\right)^{p-1} \left(\int |f(x,y)|\,\mathrm{d}x)\right)$$

und höldern sie.



"'You have a small capacity for reason, some basic tool-making skills, and the use of a few simple words.' . . . Yep. That's you."