Analysis 3
Erste Modulprüfung
Ws 2018/19
03.04.2019

- Es gibt 8 Aufgaben. Die jeweilige Punktzahl steht am linken Rand.
- Die Maximalpunktzahl ist 38. Zum Bestehen der Klausur sind 15 Punkte hinreichend.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.
- In allen Aufgaben sind alle Schritte zu begründen.
- Verwenden Sie pro Aufgabe jeweils ein neues Blatt.
- Abgaben mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Tragen Sie bitte Namen, Matrikelnummer sowie Namen Ihres Tutors ein.

Name	M-Nr	Tutor

1	2	3	4	5	6	7	8		Σ

⟨4⟩ **Aufgabe 1**

Bestimmen Sie die folgenden Integrale.

a. $\displaystyle\int_{x^2+y^2\leqslant 4} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. *b.* $\displaystyle\int_{x^2+y^2+z^2\leqslant 9} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

⟨4⟩ **Aufgabe 2**

Sei $h\colon [0,1] \to [0,\infty)$ stetig und A die Fläche zwischen dem Graphen von h und der x-Achse. Zeigen Sie auf elementare Weise, dass

$$\int_{\partial A} f\,\mathrm{d}x = -\int_A f_y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

für jede C^1-Funktion $f\colon A \to \mathbb{R}$.

⟨5⟩ **Aufgabe 3**

Sei $v = (v_1, v_2, v_3)\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein differenzierbares Vektorfeld.

a. Definieren Sie $\nabla \bullet v$ und $\nabla \times v$.

b. Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung an das Vektorfeld v dafür an, dass

$$\omega = v_1\,\mathrm{d}x_1 + v_2\,\mathrm{d}x_2 + v_3\,\mathrm{d}x_3$$

geschlossen ist.

c. Zeigen Sie, dass unter dieser Bedingung v ein Gradientenfeld ist — dass es also eine stetig differenzierbare Funktion $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$v = \nabla\phi.$$

⟨6⟩ **Aufgabe 4**

Sei (f_k) eine Folge stetiger Funktionen auf $\mathbb{R}$, die punktweise gegen eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergiert.

a. Unter welcher Voraussetzung gilt der Satz von Lebesgue, also

$$\int_{\mathbb{R}} f\,\mathrm{d}\lambda = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k\,\mathrm{d}\lambda \ ?$$

b. Geben Sie ein Beispiel dafür, dass diese Voraussetzung notwendig ist.

c. Unter welcher Voraussetzung gilt das Lemma von Fatou, also

$$\int_{\mathbb{R}} f\,\mathrm{d}\lambda \leqslant \liminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k\,\mathrm{d}\lambda \ ?$$

d. Geben Sie ein Beispiel dafür, dass diese Voraussetzung notwendig ist.

⟨4⟩ **Aufgabe 5**

a. Formulieren sie den Satz von Gauss für ein Vektorfeld F, das in einer Umgebung einer kompakten, orientierten und berandeten 3-Mannigfaltigkeit M^3 im $\mathbb{R}^3$ definiert ist.
b. Wenden Sie diesen Satz auf das Vektorfeld $F = id$ und die kompakte Einheitskugel $\mathbb{B}^3$ an und zeigen Sie damit, dass

$$|\mathbb{S}^2| = 3\,|\mathbb{B}^3|\,.$$

⟨4⟩ **Aufgabe 6**

Sei $f\colon [a,b] \to [0,\infty)$ stetig und

$$A_f = \{(x,y) : a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}.$$

die Fläche unter dem Graphen von f. Zeigen sie, dass A_f messbar ist und

$$\lambda(A_f) = \int_a^b f\,\mathrm{d}\lambda$$

gilt.

⟨5⟩ **Aufgabe 7**

a. Zeigen sie, dass es eine C^1-Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ auf einem hinreichend kleinen Intervall I um 0 gibt, die die Gleichung

$$t f(t) + 2t^2 \cos(f(t)) = f(t) \tag{‡}$$

erfüllt.
b. Bestimmen sie außerdem $f'(0)$.
c. Ist diese Funktion f eindeutig?

⟨6⟩ **Aufgabe 8**

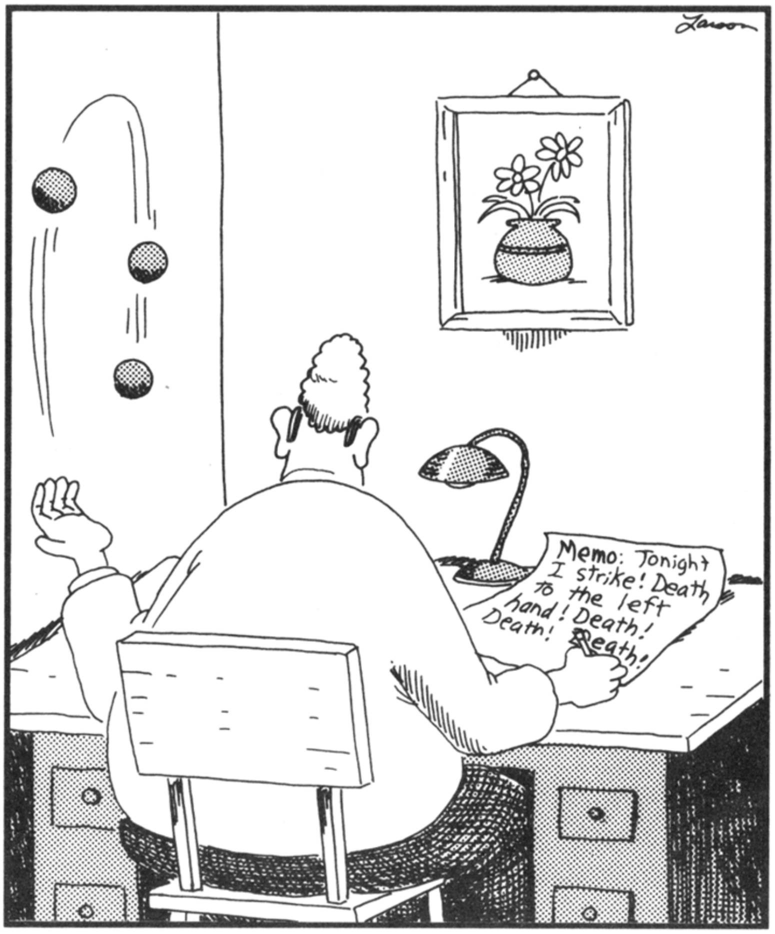
a. Bestimmen Sie die Extremstellen der Funktion

$$\varphi(x,y,z) = (1-x)(1-y)(1-z)$$

unter der Bedingung, dass $x + y + z = 2$.
b. Diskutieren Sie diese Funktion auf dem Rand der abgeschlossenen Menge

$$\Delta = \big\{(x,y,z) : x,y,z \geqslant 0 \wedge x + y + z = 2\big\}.$$

c. Bestimmen Sie das absolute Maximum von φ auf Δ.



Innocent and carefree, Stuart's left hand didn't know what the right was doing.