Analysis 3
Erste Modulprüfung
Ws 2018/19
03.04.2019

— Es gibt 8 Aufgaben. Die jeweilige Punktzahl steht am linken Rand.
— Die Maximalpunktzahl ist 38. Zum Bestehen der Klausur sind 15 Punkte hinreichend.
— Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
— Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.
— In allen Aufgaben sind alle Schritte zu begründen.
— Verwenden Sie pro Aufgabe jeweils ein neues Blatt.
— Abgaben mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
— Tragen Sie bitte Namen, Matrikelnummer sowie Namen Ihres Tutors ein.

Name M-Nr Tutor

1	2	3	4	5	6	7	8		Σ

⟨4⟩ **Aufgabe 1**

Bestimmen Sie die folgenden Integrale.

a. $\displaystyle\int_{x^2+y^2\leqslant 4} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. *b.* $\displaystyle\int_{x^2+y^2+z^2\leqslant 9} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

⏩ *a.* Mit Polarkoordinaten und deren Jacobideterminante r erhält man

$$\int_{x^2+y^2\leqslant 4} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \frac{r}{r}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = 4\pi.$$

b. Mit Kugelkoordinaten und deren Jacobideterminante $r^2\sin\theta$ erhält man

$$\begin{aligned}\int_{x^2+y^2+z^2\leqslant 9} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^3 \frac{r^2\sin\theta}{r}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{3}{2}\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\pi} 3\pi\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = 6\pi.\end{aligned}$$ ⏪

⟨4⟩ **Aufgabe 2**

Sei $h\colon [0,1]\to[0,\infty)$ stetig und A die Fläche zwischen dem Graphen von h und der x-Achse. Zeigen Sie auf elementare Weise, dass

$$\int_{\partial A} f\,\mathrm{d}x = -\int_A f_y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

für jede C^1-Funktion $f\colon A\to\mathbb{R}$.

⏩ Es ist, mit Fubini,

$$\begin{aligned}\int_A f_y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^1\left(\int_0^{h(x)} f_y(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1\left(f(x,y)\Big|_{y=0}^{y=h(x)}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 (f(x,h(x))-f(x,0))\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Bei dem Integral über ∂A fallen die vertikalen Abschnitte weg, da dort $\mathrm{d}x=0$. Es bleiben das Integral über $\gamma_0\colon t\mapsto(t,0)$ und, mit umgekehrten Vorzeichen, über $\gamma_2\colon t\mapsto(t,h(t))$. Es ist also

$$\begin{aligned}\int_{\partial A} f\,\mathrm{d}y &= \int_{\gamma_0} f\,\mathrm{d}y - \int_{\gamma_2} f\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 f(t,0)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 f(t,h(t)\,\mathrm{d}t = -\int_A f_y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$ ⏪

⟨5⟩ **Aufgabe 3**
Sei $v = (v_1, v_2, v_3) \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein differenzierbares Vektorfeld.
a. Definieren Sie $\nabla \bullet v$ und $\nabla \times v$.
b. Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung an das Vektorfeld v dafür an, dass

$$\omega = v_1 \,\mathrm{d}x_1 + v_2 \,\mathrm{d}x_2 + v_3 \,\mathrm{d}x_3$$

geschlossen ist.
c. Zeigen Sie, dass unter dieser Bedingung v ein Gradientenfeld ist — dass es also eine stetig differenzierbare Funktion $\varphi \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$v = \nabla \phi.$$

▸▸ *a.* Es ist $\nabla \bullet v = \partial_1 v_1 + \partial_2 v_2 + \partial_3 v_3$ und

$$\nabla \times v =$$

b. Notwendig ist, dass ω geschlossen ist, also $\mathrm{d}\omega = 0$ gilt. Mit den Rechenregeln für die äußere Ableitung ist dies gleichbedeutend mit $\nabla \times v = 0$. Hinreichend ist die Bedingung, dass $\mathrm{d}\omega$ geschlossen auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet ist.
c. Der $\mathbb{R}^3$ ist einfach zusammenhängend. Ist also ω geschlossen, so gibt es also eine 0-Form α auf $\mathbb{R}^3$ derart, dass $\mathrm{d}\alpha = \omega$. Eine 0-Form ist aber eine Funktion. Es gibt also eine differenzierbare Funktion $\varphi \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, so dass

$$\mathrm{d}\varphi = \partial_1 \varphi \,\mathrm{d}x_1 + \partial_2 \varphi \,\mathrm{d}x_2 + \partial_3 \varphi \,\mathrm{d}x_3 = \omega = v_1 \,\mathrm{d}x_1 + v_2 \,\mathrm{d}x_2 + v_3 \,\mathrm{d}x_3.$$

Somit ist

$$\nabla \varphi = v.$$ ◂◂

⟨6⟩ **Aufgabe 4**

Sei (f_k) eine Folge stetiger Funktionen auf $\mathbb{R}$, die punktweise gegen eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergiert.

a. Unter welcher Voraussetzung gilt der Satz von Lebesgue, also

$$\int_{\mathbb{R}} f \,\mathrm{d}\lambda = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k \,\mathrm{d}\lambda \ ?$$

b. Geben Sie ein Beispiel dafür, dass diese Voraussetzung notwendig ist.

c. Unter welcher Voraussetzung gilt das Lemma von Fatou, also

$$\int_{\mathbb{R}} f \,\mathrm{d}\lambda \leqslant \liminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k \,\mathrm{d}\lambda \ ?$$

d. Geben Sie ein Beispiel dafür, dass diese Voraussetzung notwendig ist.

▸▸ *a.* Es muss eine integrierbare Majorante existieren. Das heißt, eine Funktion $g \in L(\mathbb{R})$, so dass $|f_k| \leqslant g$ für alle k gilt.

b. Zum Beispiel $f_k = k^{-1}\chi_{[0,k]}$ oder $f_k = k\chi_{[0,1/k]}$, und viele andere.

c. Es muss $f_k \geqslant 0$ für alle k gelten sowie $f = \lim f_k <_\mu \infty$.

d. Für $f_k = -k^{-1}\chi_{[0,k]}$ gilt beispielsweise

$$\int_{\mathbb{R}} f_k \,\mathrm{d}\lambda = -1, \qquad \int_{\mathbb{R}} \lim f_k \,\mathrm{d}\lambda = 0.$$ ◂◂

⟨4⟩ **Aufgabe 5**

a. Formulieren sie den Satz von Gauss für ein Vektorfeld F, das in einer Umgebung einer kompakten, orientierten und berandeten 3-Mannigfaltigkeit M^3 im $\mathbb{R}^3$ definiert ist.

b. Wenden Sie diesen Satz auf das Vektorfeld $F = id$ und die kompakte Einheitskugel $\mathbb{B}^3$ an und zeigen Sie damit, dass

$$|\mathbb{S}^2| = 3\,|\mathbb{B}^3|\,.$$

▸▸ *a.*

$$\int_{\partial M^3} \langle F, n\rangle \,\mathrm{d}A = \int_{M^3} \operatorname{div} F \,\mathrm{d}V.$$

b. Für $F = id$ und $M^3 = \mathbb{B}^3$ ist

$$\langle F, n\rangle = 1, \qquad \operatorname{div} F = 3.$$

Also erhält man

$$\int_{\partial \mathbb{B}^3} \langle F, n\rangle \,\mathrm{d}A = \int_{\mathbb{S}^2} \mathrm{d}A = |\mathbb{S}^2|$$

und

$$\int_{\mathbb{B}^3} \operatorname{div} F \,\mathrm{d}V = 3 \int_{\mathbb{B}^3} \mathrm{d}V = 3\,|\mathbb{B}^3|\,. \qquad ◂◂$$

⟨4⟩ **Aufgabe 6**

Sei $f\colon [a,b] \to [0,\infty)$ stetig und

$$A_f = \{(x,y) : a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}.$$

die Fläche unter dem Graphen von f. Zeigen sie, dass A_f messbar ist und

$$\lambda(A_f) = \int_a^b f \,\mathrm{d}\lambda$$

gilt.

▸▸ A_f ist abgeschlossen, also messbar. Mit Fubini erhält man mit $m = \sup_{[a,b]} f$ dann

$$\begin{aligned}\lambda(A_f) = \int_{[a,b]\times[0,m]} \chi_{A_f} &= \int_{[a,b]} \left(\int_{[0,m]} \chi_{A_f}(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_{[a,b]} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f. \qquad ◂◂\end{aligned}$$

⟨5⟩ **Aufgabe 7**

a. Zeigen sie, dass es eine C^1-Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ auf einem hinreichend kleinen Intervall I um 0 gibt, die die Gleichung

$$t f(t) + 2t^2 \cos(f(t)) = f(t) \tag{‡}$$

erfüllt.

b. Bestimmen sie außerdem $f'(0)$.

c. Ist diese Funktion f eindeutig?

▸▸ *a.* Betrachte die Funktion

$$\varphi(t,z) = tz + 2t^2 \cos z - z.$$

Es ist

$$\varphi(0,0) = 0, \qquad \varphi_z(0,0) = -1 \neq 0.$$

Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es daher lokal um 0 eine Funktion

$$f\colon\ t \mapsto z = f(t), \qquad f(0) = 0,$$

die die Gleichung $\varphi(t, f(t)) = 0$ löst. Dies ist äquivalent zu (‡).

b. Wir dürfen die Gleichung $\varphi(t, f(t)) = 0$ nach t differenzieren und erhalten

$$\varphi_t(0,0) + \varphi_z(0,0)f'(0) = 0 - f'(0) = 0.$$

Also ist $f'(0) = 0$.
c. Die Funktion f ist lokal eindeutig mit der Bedingung $f(0) = 0$. Das besagt der Satz über implizite Funktionen. ◂◂

⟨6⟩ **Aufgabe 8**
a. Bestimmen Sie die Extremstellen der Funktion

$$\varphi(x, y, z) = (1-x)(1-y)(1-z)$$

unter der Bedingung, dass $x + y + z = 2$.
b. Diskutieren Sie diese Funktion auf dem Rand der abgeschlossenen Menge

$$\Delta = \{(x, y, z) : x, y, z \geqslant 0 \wedge x + y + z = 2\}.$$

c. Bestimmen Sie das absolute Maximum von φ auf Δ.

▸▸ *a.* Die Zielfunktion ist

$$F(x, y, z, \lambda) = (1-x)(1-y)(1-z) + \lambda(x + y + z - 2).$$

Derer kritische Punkte sind die Lösungen der Gleichungen

$$\begin{aligned} -(1-y)(1-z) + \lambda &= 0, \\ -(1-x)(1-z) + \lambda &= 0, \\ -(1-x)(1-y) + \lambda &= 0, \\ x + y + z &= 2. \end{aligned}$$

Also ist

$$(1-y)(1-z) = (1-x)(1-z) = (1-x)(1-y).$$

Ist ein Faktor Null, so auch ein weiterer, und wir erhalten die Lösungen

$$p_1 = (0,1,1), \qquad p_2 = (1,0,1), \qquad p_3 = (1,1,0).$$

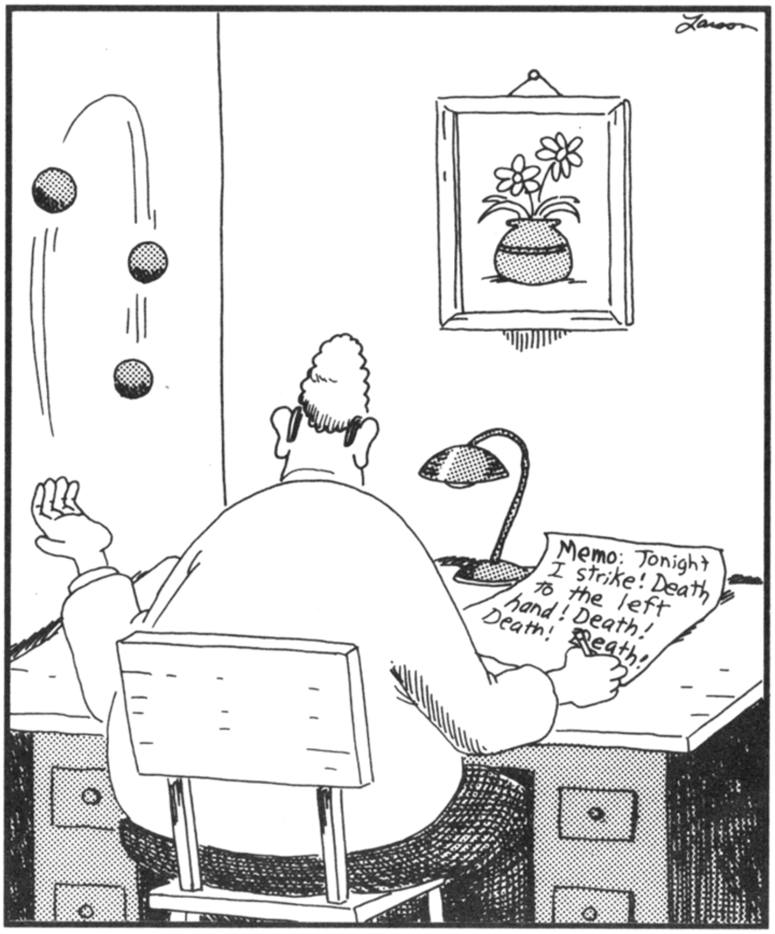
Andernfalls folgt $z = y = z$, und damit die Lösung

$$p_0 = \frac{2}{3}(1,1,1).$$

b. Aus Symmetriegründen genügt es, den Randabschnitt mit $z = 0$ zubetrachten. Dann ist $y = 2 - x$ und

$$\varphi(x, 2-x, 0) = (1-x)(x-1) = -(1-x)^2 \leqslant 0.$$

Auf dem Rand ist also $\varphi \leqslant 0$, und nimmt den Wert 0 nur in den Punkten p_1, p_2, p_3 an.
c. Es ist nun klar, dass φ im Punkt p_0 ihr absolutes Maximum über Δ annimmt.



Innocent and carefree, Stuart's left hand didn't know what the right was doing.