Analysis 3

Zweite Modulprüfung

Ws 2018/19

09.10.2019

- Es gibt 8 Aufgaben. Die jeweilige Punktzahl steht am linken Rand.
- Die Maximalpunktzahl ist 34. Zum Bestehen der Klausur sind 14 Punkte hinreichend.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.
- In allen Aufgaben sind alle Schritte zu begründen.
- Verwenden Sie pro Aufgabe jeweils ein neues Blatt.
- Abgaben mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Tragen Sie bitte Namen, Matrikelnummer sowie Namen Ihres Tutors ein.

Name M-Nr Tutor

1	2	3	4	5	6	7	8		Σ

⟨4⟩ **Aufgabe 1**
Untersuchen Sie, welche der folgenden 1-Formen geschlossen, welche exakt sind. Geben Sie im zweiten Fall eine Stammfunktion an.

a. $x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y$. *b.* $y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y$.
c. $y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$. *d.* $yz\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z$.

⟨5⟩ **Aufgabe 2**
Sei $v = (v_1, v_2, v_3) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein differenzierbares Vektorfeld.
a. Definieren Sie $\nabla \bullet v$ und $\nabla \times v$.
b. Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung an das Vektorfeld v dafür an, dass

$$\omega = v_1\,\mathrm{d}x_1 + v_2\,\mathrm{d}x_2 + v_3\,\mathrm{d}x_3$$

geschlossen ist.
c. Zeigen Sie, dass unter dieser Bedingung v ein Gradientenfeld ist — dass es also eine stetig differenzierbare Funktion $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$v = \nabla\phi.$$

⟨4⟩ **Aufgabe 3**
Zeigen Sie, dass es ein $\varepsilon > 0$ und eine C^1-Funktion $f : (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \to \mathbb{R}$ mit $f(1) = 1$ gibt, die die Gleichung

$$\frac{t}{f(t)} + \frac{\log f(t)}{t} = f(t) \tag{†}$$

erfüllt. Bestimmen Sie außerdem $f'(1)$.

⟨4⟩ **Aufgabe 4**
Die Folge (f_k) konvergiere *schwach in* $L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$ gegen f – das heißt, es gilt

$$\int f_k g\,\mathrm{d}\mu \to \int f g\,\mathrm{d}\mu, \qquad g \in L^2.$$

Außerdem gelte

$$\|f_k\|_2 \to \|f\|_2.$$

Dann konvergiert (f_k) auch in L^2 gegen f. Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass die zweite Bedingung hierfür notwendig ist.

⟨4⟩ **Aufgabe 5**

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ messbar mit $\mu(A) = 1$. Ferner seien f und g positive messbare Funktionen auf A mit $fg \geqslant 1$. Dann gilt

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu \int_A g \,\mathrm{d}\mu \geqslant 1.$$

⟨4⟩ **Aufgabe 6**

Gegeben ist

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2 + 2y^2 + 1.$$

Für welche $c \geqslant 0$ ist $f^{-1}(c)$ eine

a. 1-dimensionale,

b. 2-dimensionale Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^2$?

Natürlich mit Begründung.

⟨4⟩ **Aufgabe 7**

a. Bestimmen sie mittels der Parametrisierung

$$\Phi : \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\varphi\sin\theta \\ r\sin\varphi\sin\theta \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$$

das Volumen der Kugel $B_a = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| \leqslant a\}$.

Hinweis: Die Jacobideterminante von Φ ist $r^2 \sin\theta$.

b. Bestimmen sie mittels einer geeigneten linearen Transformation hiermit auch das Volumen des Ellipsoids

$$E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1, \qquad a,b,c > 0.$$

⟨5⟩ **Aufgabe 8**

Gegeben sind die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y,z) = x + y - z$$

und die Menge

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + 4y^2 = 11 \wedge 4x = 3z\}.$$

a. Zeigen sie, dass M abgeschlossen und beschränkt ist, also kompakt.

b. Begründen sie, warum f auf M ein Minimum und ein Maximum besitzt.

c. Bestimmen sie diese Extremalstellen mit der Methode der Lagrangemultiplikatoren.

"Always keep label up, Dag."