Analysis 3

Zweite Modulprüfung

Ws 2018/19

09.10.2019

- Es gibt 8 Aufgaben. Die jeweilige Punktzahl steht am linken Rand.
- Die Maximalpunktzahl ist 34. Zum Bestehen der Klausur sind 14 Punkte hinreichend.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.
- In allen Aufgaben sind alle Schritte zu begründen.
- Verwenden Sie pro Aufgabe jeweils ein neues Blatt.
- Abgaben mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Tragen Sie bitte Namen, Matrikelnummer sowie Namen Ihres Tutors ein.

Name M-Nr Tutor

1	2	3	4	5	6	7	8		Σ

⟨4⟩ **Aufgabe 1**

Untersuchen Sie, welche der folgenden 1-Formen geschlossen, welche exakt sind. Geben Sie im zweiten Fall eine Stammfunktion an.

a. $x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y$. *b.* $y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y$.
c. $y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$. *d.* $yz\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z$.

▸▸ *a.* Geschlossen, Stammfunktion $(x^2 + y^2)/2$.
b. Nicht geschlossen, denn $\mathrm{d}(y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y) = -2\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \neq 0$.
c. Geschlossen, Stammfunktion xy.
d. Geschlossen, Stammfunktion xyz. ◂◂

⟨5⟩ **Aufgabe 2**

Sei $v = (v_1, v_2, v_3)\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein differenzierbares Vektorfeld.
a. Definieren Sie $\nabla \bullet v$ und $\nabla \times v$.
b. Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung an das Vektorfeld v dafür an, dass

$$\omega = v_1\,\mathrm{d}x_1 + v_2\,\mathrm{d}x_2 + v_3\,\mathrm{d}x_3$$

geschlossen ist.
c. Zeigen Sie, dass unter dieser Bedingung v ein Gradientenfeld ist — dass es also eine stetig differenzierbare Funktion $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$v = \nabla\phi.$$

▸▸ *a.* Es ist $\nabla \bullet v = \partial_1 v_1 + \partial_2 v_2 + \partial_3 v_3$ und

$$\nabla \times v = (\partial_2 v_3 - \partial_3 v_2, \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3, \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1)^\top.$$

b. Notwendig ist, dass ω geschlossen ist, also $\mathrm{d}\omega = 0$ gilt. Mit den Rechenregeln für die äußere Ableitung ist dies gleichbedeutend mit $\nabla \times v = 0$. Hinreichend ist die Bedingung, dass $\mathrm{d}\omega$ geschlossen auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet ist.
c. Der $\mathbb{R}^3$ ist einfach zusammenhängend. Ist also ω geschlossen, so gibt es also eine 0-Form α auf $\mathbb{R}^3$ derart, dass $\mathrm{d}\alpha = \omega$. Eine 0-Form ist aber eine Funktion. Es gibt also eine differenzierbare Funktion $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, so dass

$$\mathrm{d}\varphi = \partial_1\varphi\,\mathrm{d}x_1 + \partial_2\varphi\,\mathrm{d}x_2 + \partial_3\varphi\,\mathrm{d}x_3 = \omega = v_1\,\mathrm{d}x_1 + v_2\,\mathrm{d}x_2 + v_3\,\mathrm{d}x_3.$$

Somit ist

$$\nabla\varphi = v.$$ ◂◂

⟨4⟩ **Aufgabe 3**
Zeigen Sie, dass es ein $\varepsilon > 0$ und eine C^1-Funktion $f\colon (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \to \mathbb{R}$ mit $f(1) = 1$ gibt, die die Gleichung

$$\frac{t}{f(t)} + \frac{\log f(t)}{t} = f(t) \tag{†}$$

erfüllt. Bestimmen Sie außerdem $f'(1)$.

▸▸ Die Funktion

$$F(t,x) = \frac{t}{x} + \frac{\log x}{t} - x$$

ist stetig differenzierbar in einer Umgebung des Punktes $(1,1) \in \mathbb{R}^2$, und es gilt

$$F(1,1) = 0, \qquad F_x(1,1) = \left(-\frac{t}{x^2} + \frac{1}{xt} - 1\right)\Bigg|_{(1,1)} = -1 \neq 0.$$

Also ist der Satz über implizite Funktionen anwendbar, und es gibt ein $\varepsilon > 0$ und eine Funktion $f\colon (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \to \mathbb{R}$ mit $f(1) = 1$ und

$$F(t, f(t)) = 0, \tag{‡}$$

was der Gleichung (†) entspricht. Die Ableitung erhält man durch Differenzieren von (‡):

$$0 = F_t(1,1) + F_x(1,1) f'(1) = 1 - f'(1)$$

ergibt $f'(1) = 1$. ◂◂

⟨4⟩ **Aufgabe 4**
Die Folge (f_k) konvergiere *schwach in* $L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$ gegen f – das heißt, es gilt

$$\int f_k g \, \mathrm{d}\mu \to \int f g \, \mathrm{d}\mu, \qquad g \in L^2.$$

Außerdem gelte

$$\|f_k\|_2 \to \|f\|_2 .$$

Dann konvergiert (f_k) auch in L^2 gegen f. Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass die zweite Bedingung hierfür notwendig ist.

▸▸ Es ist

$$\|f_k - f\|_2^2 = \int (f_k - f)^2 = \|f_k\|_2^2 - 2\int f f_k + \|f\|^2 .$$

Aufgrund der schwachen Konvergenz gilt $\int f f_k \to \int f^2 = \|f\|_2^2$. Zusammen mit $\|f_k\|_2^2 \to \|f\|_2^2$ erhalten wir

$$\|f_k - f\|_2^2 \to \|f\|_2^2 - 2\,\|f\|_2^2 + \|f\|_2^2 = 0.$$

Die Normbedinung ist hierbei notwendig. Denn im Raum $\ell^2(\mathbb{N})$ konvergieren die Einheitsvektoren e_n schwach gegen 0, da für jede Folge $x \in \ell^2(\mathbb{N})$

$$\langle x, e_n \rangle = x_n \to 0.$$

Wegen $\|e_n\| = 1$ für alle n konvergieren sie aber nicht stark gegen 0. ◂◂

⟨4⟩ **Aufgabe 5**
Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ messbar mit $\mu(A) = 1$. Ferner seien f und g positive messbare Funktionen auf A mit $fg \geqslant 1$. Dann gilt

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu \int_A g \,\mathrm{d}\mu \geqslant 1.$$

▸▸ Mit $fg \geqslant 1$ ist auch $\sqrt{fg} \geqslant 1$, und für nichtnegative Funktionen h gilt $\sqrt{h^2} = h$. Mit $\mu(A) = 1$ und Hölder folgt daher

$$1 = \int_A 1 \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int_A \sqrt{fg} \,\mathrm{d}\mu \leqslant \left(\int_A f \,\mathrm{d}\mu \right)^{1/2} \left(\int_A g \,\mathrm{d}\mu \right)^{1/2}.$$

Dies gilt auch für den Fall, dass eines dieser Integrale unbeschränkt ist. Quadrieren ergibt die Behauptung. ◂◂

⟨4⟩ **Aufgabe 6**
Gegeben ist

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2 + 2y^2 + 1.$$

Für welche $c \geqslant 0$ ist $f^{-1}(c)$ eine
a. 1-dimensionale,
b. 2-dimensionale Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^2$?
Natürlich mit Begründung.

▸▸ *a.* Es ist

$$f(x,y) = (x^2 + y^2 - 1)^2 + 4y^2,$$

somit nimmt f alle Werte in $[0,\infty)$ an. Kritische Punkte sind $(-1,0)$, $(0,0)$ und $(1,0)$, die zugehörigen kritischen Werte sind 0 und 1. Allerdings besteht $f^{-1}(0)$ aus zwei isolierten absoluten Minimalstellen, bildet also eine Mannigfaltigkeit der Dimension 0, und nur $f^{-1}(1)$ ist keine Mannigfaltigkeit. Somit ist $f^{-1}(c)$ für $c \in [0,1) \cup (1,\infty)$ eine Mannigfaltigkeit. ◂◂

⟨4⟩ **Aufgabe 7**

a. Bestimmen sie mittels der Parametrisierung

$$\Phi : \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\varphi\sin\theta \\ r\sin\varphi\sin\theta \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$$

das Volumen der Kugel $B_a = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| \leqslant a\}$.

Hinweis: Die Jacobideterminante von Φ ist $r^2 \sin\theta$.

b. Bestimmen sie mittels einer geeigneten linearen Transformation hiermit auch das Volumen des Ellipsoids

$$E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1, \qquad a, b, c > 0.$$

▸▸ *a.* Aufgrund der Transformationsformel ist

$$\begin{aligned} |B_a| = \int_{B_a} \mathrm{d}V &= \int_{[0,a]\times[0,2\pi]\times[-\pi/2,\pi/2]} r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r \\ &= 2\pi \int_0^a r^2 \,\mathrm{d}r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \\ &= 2\pi \cdot \frac{a^3}{3} \cdot 2 = 4\pi a^3/3. \end{aligned}$$

b. Die lineare Abbildung $T : (x, y, z) \mapsto (ax, by, cz)$ bildetdie Kugel B_1 diffeomorph auf E ab. Also gilt

$$|E| = \int_E \mathrm{d}V = \int_{B_1} |\det T| \,\mathrm{d}V = abc \int_{B_1} \mathrm{d}V = \frac{4\pi}{3} abc. \quad ◂◂$$

⟨5⟩ **Aufgabe 8**

Gegeben sind die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad f(x, y, z) = x + y - z$$

und die Menge

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + 4y^2 = 11 \wedge 4x = 3z\}.$$

a. Zeigen sie, dass M abgeschlossen und beschränkt ist, also kompakt.
b. Begründen sie, warum f auf M ein Minimum und ein Maximum besitzt.
c. Bestimmen sie diese Extremalstellen mit der Methode der Lagrangemultiplikatoren.

▸▸ *a.* Aufgrund der ersten Bedingung ist zum Beispiel $|x| \leqslant 3$ und $|y| \leqslant 2$. Aus der zweiten Bedingung folgt dann auch noch $|z| \leqslant 4\,|x|\,/3 \leqslant 4$. Also ist M beschränkt. Die Menge M ist abgeschlossen, da sie der Durchschnitt der Niveaumengen zweier stetiger Funktionen ist.
b. Jede stetige reelle Funktion nimmt aufeiner kompakten Menge ihr Minimum und ihr Maximum an.
c. Schreiben wir die Nebenbedingungen in der Form $2x^2 + 4y^2 - 11 = 0$ und $4x - 3z = 0$, so ist aufgrund der Lagrangeschen Multiplikatormethode folgendes Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{aligned} 1 &= 4\lambda x + 4\mu, \\ 1 &= 8\lambda y, \\ -1 &= -3\mu \\ 11 &= 2x^2 + 4y^2, \\ 4x &= 3z. \end{aligned}$$

Etwas Rechnen liefert für (x, y, z) die zwei Lösungen $p_1 = (1, -\frac{3}{2}, \frac{4}{3})$ und $p_2 = -p_1$. Wegen

$$f(p_1) = -\frac{11}{6}, \qquad f(p_2) = \frac{11}{6}$$

liegt bei p_1 das Minimum, bei p_2 das Maximum. ◂◂

"Always keep label up, Dag."