Analysis 3

Zweite Scheinklausur

Ws 2018/19

11.02.2019

- Es gibt 8 Aufgaben. Die jeweilige Punktzahl steht am linken Rand.
- Die Maximalpunktzahl ist 27. Zum Bestehen der Klausur sind 11 Punkte hinreichend.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.
- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.
- In allen Aufgaben sind alle Schritte zu begründen.
- Verwenden Sie pro Aufgabe jeweils ein neues Blatt.
- Abgaben mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Tragen Sie bitte Namen, Matrikelnummer sowie Namen Ihres Tutors ein.

Name M-Nr Tutor

1	2	3	4	5	6	7	8		$\sum$

⟨4⟩ **Aufgabe 1**
Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und regulär.
a. Geben Sie die Definition dafür, dass f regulär ist.
b. Zeigen Sie, dass das Bild jeder offenen Menge unter f ebenfalls offen ist.
c. Geben Sie ein Beispiel, dass die Regularität von f hinreichend, aber nicht notwendig ist.

⟨5⟩ **Aufgabe 2**
Sei $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, und

$$h := (\partial_1\varphi, .., \partial_n\varphi)^\top : \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

a. Definieren Sie, wann die Hessesche $H\varphi$ von φ strikt positiv definit ist.
b. Ist dies der Fall, so ist h in jedem Punkt ein lokaler Diffeomorphismus.
c. Darüber hinaus ist h injektiv auf ganz $\mathbb{R}^n$.

⟨5⟩ **Aufgabe 3**
Sei A eine reelle $n \times n$-Matrix und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$. Bestimmen Sie das Maximum der Funktion

$$f : \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \langle Ax, x\rangle + \langle x, Ax\rangle$$

under der Nebenbedingung $\langle x, x\rangle = 2$.

⟨2⟩ **Aufgabe 4**
a. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}$ eine Lebesgue-Nullmenge in $\mathbb{R}$ bildet.
b. Geben Sie ein Maß μ auf $\mathbb{R}$ an, so dass $\mu(\mathbb{Q}) = 1$.

⟨2⟩ **Aufgabe 5**
Ist $h\colon [a,b]^2 \to \mathbb{R}$ stetig, so gilt

$$\int_a^b \int_a^u h(u,v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = \int_a^b \int_v^b h(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

⟨3⟩ **Aufgabe 6**
Zeigen Sie mithilfe des Satzes von der dominierten Konvergenz:
Ist $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit kompakten Träger, so ist

$$F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y \tag{†}$$

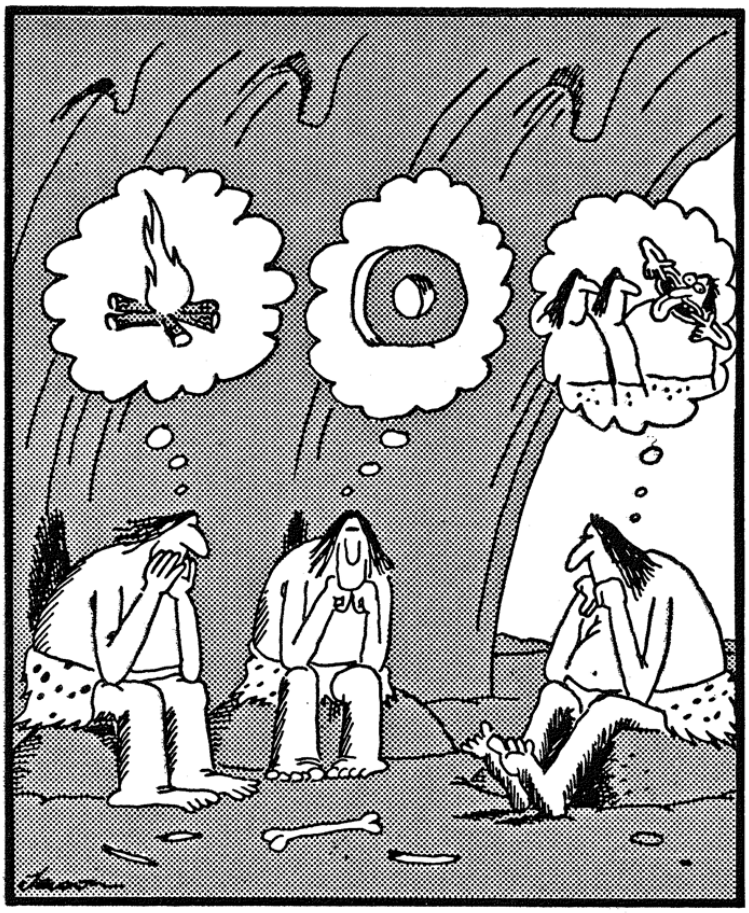
wohldefiniert, differenzierbar, und es gilt

$$F'(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

⟨3⟩ **Aufgabe 7**
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Einheitskreises, indem Sie die 1-Form $x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x$ über seinen Rand integrieren.

⟨3⟩ **Aufgabe 8**
Formulieren und beweisen Sie den Satz von Stokes auf elementare Weise für

a. $\displaystyle\int_{\partial[0,1]} g(x)$ *b.* $\displaystyle\int_{\partial[0,1]^2} h(x,y)\,\mathrm{d}y$



Primitive think tanks