

Aufgabe 1.1.

(a) Nein, f ist nicht lokal inj.

Sei $\varepsilon > 0$ geg.

Wir behaupten: es ist $f|_{B_\varepsilon(0,0)}$ nicht injektiv.

$$\text{Es ist } f\left(\frac{\varepsilon}{2}, 0\right) = \left(\frac{\varepsilon^2}{4}, 0\right)$$

$$\text{Es ist } f\left(-\frac{\varepsilon}{2}, 0\right) = \left(\frac{\varepsilon^2}{4}, 0\right).$$

$$\text{Aber } \left(\frac{\varepsilon}{2}, 0\right), \left(-\frac{\varepsilon}{2}, 0\right) \in B_\varepsilon(0,0)$$

$$\text{und } \left(\frac{\varepsilon}{2}, 0\right) \neq \left(-\frac{\varepsilon}{2}, 0\right).$$

(b) Ja, $f|_{\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}}$ ist lokal injektiv.

$$\text{Sei } (u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Es ist $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar

$$\text{und } \det Df(u_0, v_0) = \det \begin{pmatrix} 2u_0 & -2v_0 \\ 2v_0 & 2u_0 \end{pmatrix} = 2(u_0^2 + v_0^2) \neq 0$$

Also gilt es nach Umkehrsatz 19.1.

Umgebungen U von (u_0, v_0)

und V von $f(u_0, v_0)$

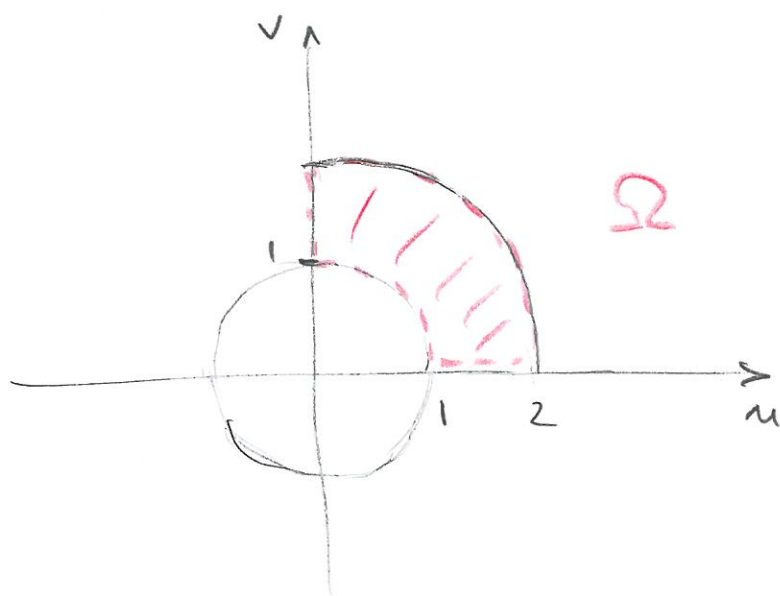
mit $f|_u^v$ bij., also $f|_u$ inj.

2

(c) Nein, $f|_{\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}}$ ist kein
Diffeomorph. auf sein Bild, da
es nicht inj. ist:

$$f(1,0) = (1,0) = f(-1,0)$$

(d)



$$\text{Es ist } \Omega = \left\{ (t \cos(\alpha), t \sin(\alpha)) : t \in (1,2), \alpha \in (0, \frac{\pi}{2}) \right\}$$

$$\text{Es ist } f(t \cos(\alpha), t \sin(\alpha))$$

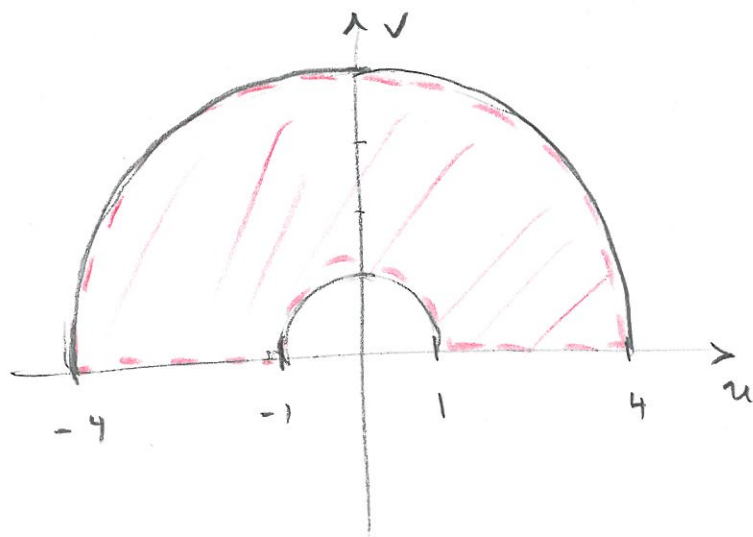
$$= (t^2(\cos(\alpha)^2 - \sin(\alpha)^2), t^2 2 \cos(\alpha) \sin(\alpha))$$

$$= (t^2 \cos(2\alpha), t^2 \sin(2\alpha))$$

Also ist

$$f(\Omega) = \left\{ (t^2 \cos(2\alpha), t^2 \sin(2\alpha)) : \begin{array}{l} t \in (1, 2), \\ \alpha \in (0, \frac{\pi}{2}) \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ (s \cos(\beta), s \sin(\beta)) : \begin{array}{l} s \in (1, 4), \\ \beta \in (0, \pi) \end{array} \right\}$$

 $f(\Omega)$

(e) Ja, $f|_{\Omega}^{f(\Omega)}$ ist ein Diffeomorphismus.

Dank Kor. 19.4 gilt: $f|_{\Omega}^{f(\Omega)}$ bij + regulär.

Schon gezeigt in (b): $f|_{\mathbb{R} \setminus \{0,0\}}$ reg.

Gz: $f|_{\Omega}$ inj.

$$\begin{aligned} \text{Sei } f(t \cos(\alpha), t \sin(\alpha)) \\ = f(\tilde{t} \cos(\tilde{\alpha}), \tilde{t} \sin(\tilde{\alpha})) \end{aligned}$$

$$\text{für } t, \tilde{t} \in (1, 2), \alpha, \tilde{\alpha} \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

$$\begin{aligned} u^2 - v^2 &= x \\ 2uv &= y \end{aligned}$$

$$v^2 = u^2 - x$$

$$4u^2v^2 = 4u^2(u^2 - x) = y^2$$

$$4u^4 - 4u^2x - y^2 = 0$$

$$(u^2)^2 - xu^2 - \frac{1}{4}y^2 = 0$$

$$\Rightarrow u^2 = \frac{x}{2} \pm \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4}}$$

$\uparrow$
 $\text{da } v^2 > 0$

$$\Rightarrow u = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

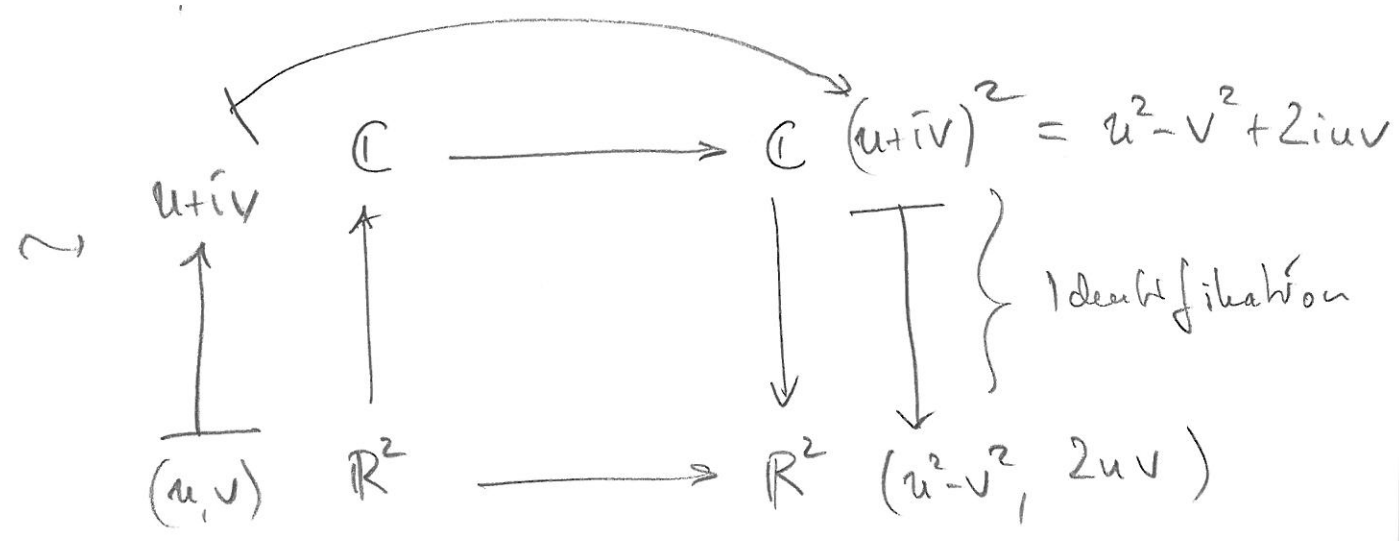
$\uparrow$
 $\text{da } u > 0$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Logo: $v = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}$

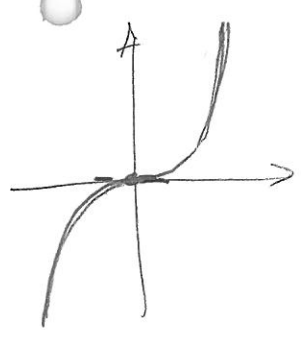
Soort: $(f|_{\Omega})^{-1}: f(\Omega) \rightarrow \Omega: (x, y) \mapsto \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{x + \sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{-x + \sqrt{x^2 + y^2}} \right)$

(f) $\mathbb{C} \xrightarrow{\tilde{f}} \mathbb{C}$ ist holomorph
 $z \mapsto z^2$



Aufgabe 1.2.

(a) Ja. Sei $n=1$. Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^3$.
 Es ist f bij. & stetig diff'bar.



Es ist f kein Diffeomorphismus:
 es ist f nicht regulär in 0,
 (cf. Vor. 19.4)

Alternativ: $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^{1/3}$
 ist nicht diff'bar in $x=0$.

(b) Ja. Im Beispiel von (a)
 ist f^{-1} stetig.

Aufgabe 1.3.

$$(a) \quad \varphi(x, y) = (x - y^2, y - x^2)$$

$$D\varphi(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & -2y \\ -2x & 1 \end{pmatrix}, \quad D\varphi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{Id}$$

$$\hat{\varphi}(x, y) = (-y^2, -x^2)$$

$$D\hat{\varphi}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & -2y \\ -2x & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Lemma 19.7: Allgemeines

$$\begin{aligned} \underbrace{[f]_{\Omega}} &= \underbrace{\|Df\|_{\Omega}} \\ &= \sup_{\substack{u \neq v \\ u, v \in \Omega}} \frac{|f(u) - f(v)|}{|u - v|} = \sup_{z \in \Omega} \|Df(z)\| \\ &= \sup_{h \neq 0} \frac{|Df(z)h|}{|h|} \end{aligned}$$

Suchen also $r > 0$ mit

$$\frac{|D\hat{\varphi}(z)h|}{|h|} \leq \frac{1}{4}$$

für alle $z \in B_r(0)$ und alle $h \neq 0$.

Ausatz: $h = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, $z = (x, y)$

$$|\mathcal{D}\hat{q}(z) \cdot h| = \left| \begin{pmatrix} 0 & -2x \\ -2y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right|$$

$$= \left| \begin{pmatrix} -2xv \\ -2yu \end{pmatrix} \right|$$

$$= 2 \sqrt{x^2 v^2 + y^2 u^2}$$

$$\frac{1}{4} |h| = \frac{1}{4} \left| \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{4} \sqrt{u^2 + v^2}$$

Wähle $r = \frac{1}{8}$.

Für $(x, y) \in B_{1/8}(0)$ ist $|x| \leq \frac{1}{8}$

und $|y| \leq \frac{1}{8}$. Also wird dort

$$\begin{aligned} 2 \sqrt{x^2 v^2 + y^2 u^2} &\leq 2 \sqrt{\frac{1}{8^2} v^2 + \frac{1}{8^2} u^2} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{u^2 + v^2} \end{aligned}$$

$$(c) \quad T_W := -\hat{q} \circ (\text{id} + W)$$

In Beweis zu Umkehrsatz

wird Fixpunkt von T benötigt.

Wir nehmen diese iterativ an,

möglich, da T eine

Kontraktion ist.

$$\text{Erinnerung: } -\hat{q} : (u, v) \mapsto (v^2, u^2)$$

$$W_0 = 0$$

$$W_1 = TW_0 = (-\hat{q}) \circ (\text{id} + W_0) = -\hat{q}$$

$$= ((x, y) \mapsto (y^2, x^2))$$

$$W_2 = TW_1 = (-\hat{q}) \circ (\text{id} + W_1)$$

$$= (-\hat{q}) \circ ((x, y) \mapsto (x + y^2, y + x^2))$$

$$= ((x, y) \mapsto ((y + x^2)^2, (x + y^2)^2))$$

$$= ((x, y) \mapsto (y^2 + 2yx^2 + x^4, x^2 + 2xy^2 + y^4))$$

$$\omega_3 = T\omega_2 = (-\hat{\varphi}) \circ (\text{id} + \omega_2)$$

$$= (-\hat{\varphi}) \circ ((x, y) \mapsto (x + y^2 + 2yx^2 + x^4, \underline{y + x^2 + 2xy^2 + y^4}))$$

$$= \left((x, y) \mapsto \left((y + x^2 + 2xy^2 + y^4)^2, (x + y^2 + 2yx^2 + x^4)^2 \right) \right)$$

2.1

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^3 + y = x^3 - x\}$$

$$(a) \quad f(x, y) = y^3 + y - x^3 + x$$

$$Df(x, y) = (-3x^2 + 1 \quad 3y^2 + 1)$$

$$3y_0^2 + 1 \neq 0 \quad \text{für alle } y_0 \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ für alle $(x_0, y_0) \in K$ gilt in Umgebung für
 $x_0 \in U \subseteq \mathbb{R}$, $y_0 \in V \subseteq \mathbb{R}$ und eine C^1 -Fkt.

$$\alpha: U \rightarrow V \quad \text{mit}$$

$$K \cap (U \times V) = \{(u, \alpha(u)) : u \in U\}$$

$$(b) \quad -3x_0^2 + 1 \neq 0 \quad \text{für alle } x_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{\sqrt{3}}, +\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$$

$\Rightarrow$ Punkte $(x_0, y_0) \in K$ sind wie gefordert,
 falls $x_0 \neq -\frac{1}{\sqrt{3}}$ und $x_0 \neq \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Annahme, für (x_0, y_0) mit $x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$
 würde eine solche Fkt. α existieren.

Dann:

$$0 = \frac{d}{dv} f(\alpha(v), v) \Big|_{v=y_0} = \dots$$

$$--- = \underbrace{f_x\left(\underbrace{u(v)}_{\frac{1}{\sqrt{3}}}, v\right)}_0 \cdot u'(v) \Big|_{v=y_0}$$

$$+ \underbrace{f_y(u(v), v)}_{= 3v^2 + 1 > 0} \cdot 1 \Big|_{v=y_0} \quad \Downarrow$$

○ Ansatz für $x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

(c) Tangenten stehen senkrecht
zum Gradienten von f (*)

$$\nabla f = \begin{pmatrix} -3x^2 + 1 \\ 3y^2 + 1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(-1, 0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{Tangente } \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\nabla f(0, 0) = \begin{pmatrix} +1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{Tangente } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\nabla f(1, 0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{Tangente } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$(*) \text{ denn: } 0 = \frac{d}{du} f(u, v(u)) \Big|_{u=x_0} = f_x(x_0, y_0) \cdot 1 + f_y(x_0, y_0) \cdot v'(x_0)$$

(d) Sei $x_0 < 0$.

3

$$\text{Es gilt } f(x_0, x_0) = x_0^3 + x_0 - x_0^3 + x_0 < 0$$

$$\text{Für } h > 0 \text{ gilt } f(x_0 - h, x_0 + h)$$

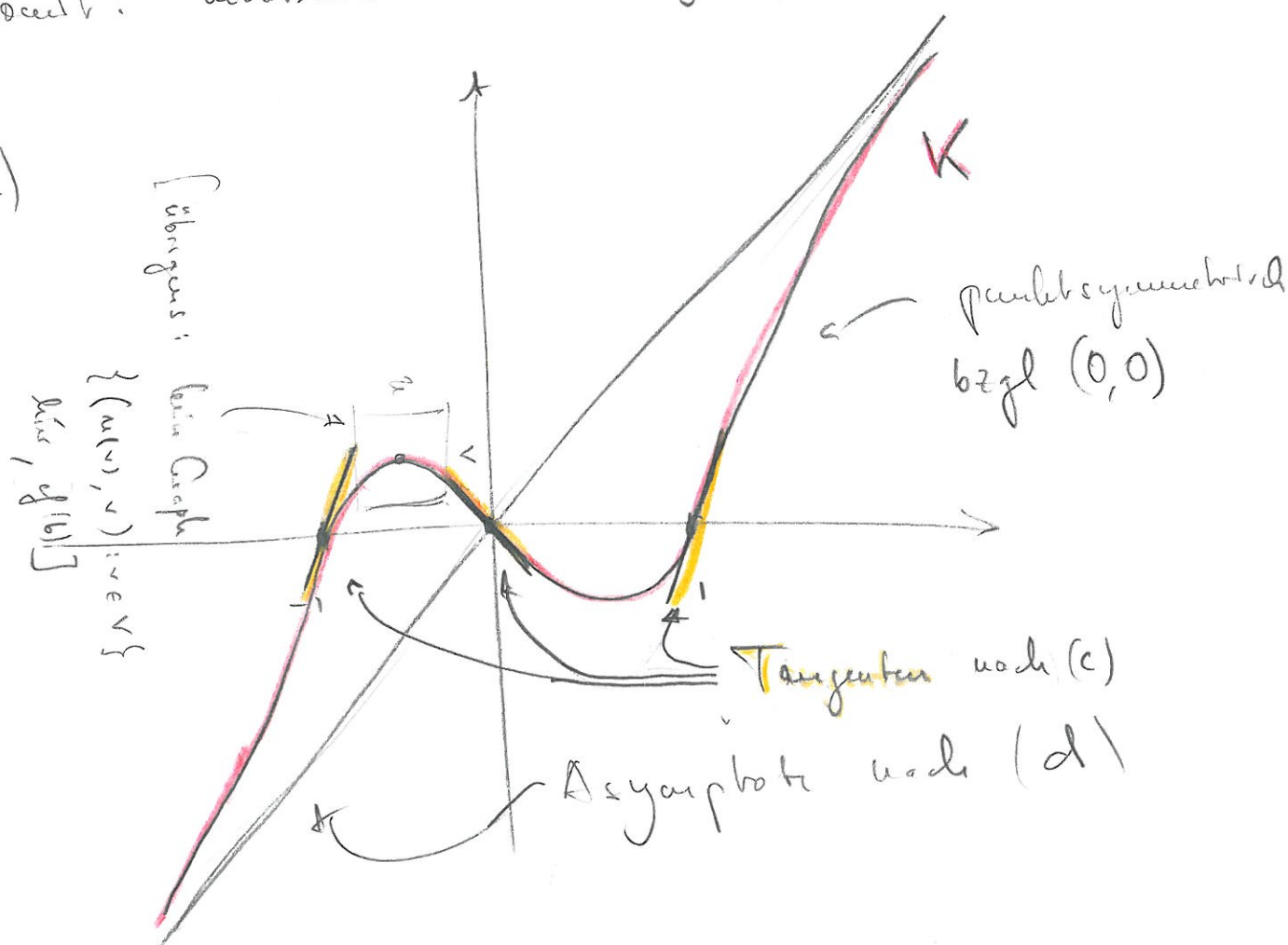
$$\begin{aligned} &= x_0^3 + 3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3 + x_0 + h \\ &\quad - x_0^3 + 3x_0^2h - 3x_0h^2 + h^3 + x_0 - h \\ &= 6x_0^2h + 2h^3 + 2x_0 \end{aligned}$$

$$> 2 \underbrace{x_0}_{< 0} (3x_0h + 1)$$

Also ist für $h = \frac{1}{3|x_0|}$ der Wert positiv.

Sucht: nichtleeres Schnitt z.B. für $\varepsilon := \frac{1}{3|x_0|}$.

(e)



2.2

Wir betrachten

$$f(u, v, w, x) := (uvw x, uvw + 2uvx + uw x + vwx)$$

Es ist

$$Df(u, v, w, x)$$

$$= \begin{pmatrix} vwx & | & uw x & | & uv x & | & uvw \\ vw + 2vx & | & uw + 2ux & | & uv + ux & | & 2uv + uw \\ + wx & | & + wx & | & + vx & | & + vw \end{pmatrix}$$

Also

$$Df(1, 1, 1, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{matrix}} \\ 4 & 4 & \end{pmatrix}$$

 $\det \neq 0$

Somit gibt es
Umgebungen
und eine C^1 -Abb.

$$f: U \rightarrow W$$

wsk

$$\begin{aligned} & \{ (u, v), (w, x) \in U \times W : g(u, v, w, x) \\ & \qquad \qquad \qquad = g(1, 1, 1, 1) \} \\ & = \{ ((u, v), f(u, v)) : (u, v) \in U \} \end{aligned}$$

2.3 (a) Wir setzen

$$x(t) = r(t) \cos(\varphi(t))$$

$$y(t) = r(t) \sin(\varphi(t))$$

wsk C^2 -Funktionen $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Es wird

$$\frac{d}{dt} (x(t), y(t))$$

$$= \begin{pmatrix} r'(t) \cos(\varphi(t)) - r(t) \sin(\varphi(t)) \varphi'(t) \\ r'(t) \sin(\varphi(t)) + r(t) \cos(\varphi(t)) \varphi'(t) \end{pmatrix}$$

Also wird die DGL zu

$$\frac{d^2}{dt^2} (x(t), y(t))$$

$$= \begin{pmatrix} r''(t) \cos(\varphi(t)) - 2 r'(t) \sin(\varphi(t)) \varphi'(t) - \\ - r(t) \cos(\varphi(t)) \varphi'(t)^2 + r(t) \sin(\varphi(t)) \varphi''(t) \end{pmatrix}, \dots$$

$$\dots, r''(t) \sin \varphi(t) + 2 r'(t) \cos(\varphi(t)) \varphi'(t) - r(t) \sin(\varphi(t)) \varphi'(t)^2 + r(t) \cos(\varphi(t)) \varphi''(t))$$

$$\stackrel{!}{=} - \frac{k}{r(t)^3} (r(t) \cos \varphi(t), r(t) \sin \varphi(t))$$

(b) Wir suchen nun Lösungen mit $r(t) = r_0$ konstant.

Es sollte also sein:

$$(-r_0 \cos(\varphi(t)) \varphi'(t)^2 - r_0 \sin(\varphi(t)) \varphi''(t), -r_0 \sin(\varphi(t)) \varphi'(t)^2 + r_0 \cos(\varphi(t)) \varphi''(t))$$

$$= - \frac{k}{r_0^2} (\cos(\varphi(t)), \sin(\varphi(t)))$$

Sucht es es möglich, $\varphi'(t) = \omega_0$ konstant zu wählen, und es sollte

$$+ r_0 \omega_0^2 = + \frac{k}{r_0^2} \text{ sein,}$$

$$\text{also } \omega_0 = \pm \sqrt{\frac{k}{r_0^3}}$$

2.4

Vollgeometrie:

$$[0, \infty) \times \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\quad} \mathbb{R}^4$$

$$(r, \theta, \varphi, \psi) \mapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta) \cos(\varphi), r \sin(\theta) \sin(\varphi) \cos(\psi), r \sin(\theta) \sin(\varphi) \sin(\psi))$$

$$\stackrel{\text{Wahl}}{=} (r c_\theta, r s_\theta c_\varphi, r s_\theta s_\varphi c_\psi, r s_\theta s_\varphi s_\psi)$$

○ Surjektion: $\exists (u, v, w, x) \in \mathbb{R}^4$ gegeben.

$$\text{Set } r := \sqrt{u^2 + v^2 + w^2 + x^2}.$$

$$r \geq |u| \Rightarrow \exists \theta \text{ mit } r c_\theta = u$$

$$\Rightarrow |r s_\theta| = \sqrt{v^2 + w^2 + x^2} \geq |v| \Rightarrow \exists \varphi \text{ mit } r s_\theta c_\varphi = v$$

$$\Rightarrow |r s_\theta s_\varphi| = \sqrt{w^2 + x^2} \geq |w| \Rightarrow \exists \psi \text{ mit } r s_\theta s_\varphi c_\psi = w$$

$$\Rightarrow |r s_\theta s_\varphi s_\psi| = \sqrt{x^2} = |x|$$

$$\text{Falls } r s_\theta s_\varphi s_\psi = -x, \text{ dann}$$

ersetze man ψ durch $-\psi$.

$$D_K(r, \theta, \varphi, \gamma) = \begin{pmatrix} c_\theta & -r s_\theta & 0 & 0 \\ s_\theta c_\varphi & r c_\theta c_\varphi & -r s_\theta s_\varphi & 0 \\ s_\theta s_\varphi c_\gamma & r c_\theta s_\varphi c_\gamma & r s_\theta c_\varphi c_\gamma & -r s_\theta s_\varphi s_\gamma \\ s_\theta s_\varphi s_\gamma & r c_\theta s_\varphi s_\gamma & r s_\theta c_\varphi s_\gamma & r s_\theta s_\varphi c_\gamma \end{pmatrix}$$

$$\det(D_K(r, \theta, \varphi, \gamma)) = r^3 s_\theta^2 s_\gamma \cdot \det \begin{pmatrix} c_\theta & -s_\theta & 0 & 0 \\ s_\theta c_\varphi & c_\theta c_\varphi & -s_\varphi & 0 \\ s_\theta s_\varphi c_\gamma & c_\theta s_\varphi c_\gamma & c_\varphi c_\gamma & -s_\gamma \\ s_\theta s_\varphi s_\gamma & c_\theta s_\varphi s_\gamma & c_\varphi s_\gamma & c_\gamma \end{pmatrix}$$

$$= r^3 s_\theta^2 s_\gamma \cdot (c_\theta \cdot c_\theta - (-s_\theta) s_\theta) \cdot \det \begin{pmatrix} c_\varphi & -s_\varphi & 0 \\ s_\varphi c_\gamma & c_\varphi c_\gamma & -s_\gamma \\ s_\varphi s_\gamma & c_\varphi s_\gamma & c_\gamma \end{pmatrix}$$

$$= r^3 s_\theta^2 s_\gamma (c_\varphi \cdot c_\varphi - (-s_\varphi) \cdot s_\varphi) \cdot \det \begin{pmatrix} c_\gamma & -s_\gamma \\ s_\gamma & c_\gamma \end{pmatrix}$$

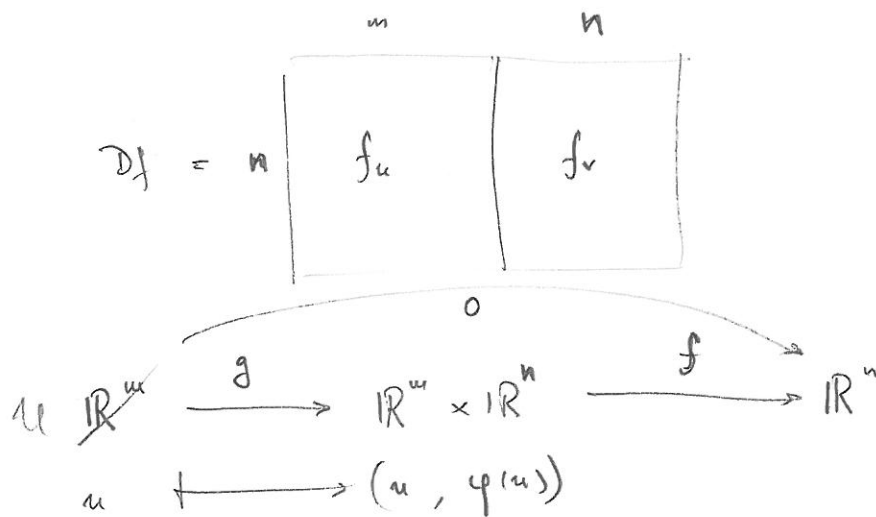
$$= r^3 s_\theta^2 s_\gamma$$

$\Rightarrow$ lokal inj. falls $r \neq 0 \wedge s_\theta \neq 0 \wedge s_\gamma \neq 0$.
 bei $(r, \theta, \varphi, \gamma)$

Somit nicht, wie Beschreibung von K zeigt.

3.1

(a)



$$0 = D(f \circ g)(u)$$

Ketten-
regel

$$Df(g(u)) \cdot Dg(u)$$

$$= \begin{bmatrix} f_u(u, \varphi(u)) & f_v(u, \varphi(u)) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{Id}_m \\ D\varphi(u) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \text{Id}_m \\ D\varphi(u) \end{bmatrix}$$

$$= f_u(u, \varphi(u)) + f_v(u, \varphi(u)) \cdot D\varphi(u)$$

$$\Rightarrow D\varphi(u) = -f_v(u, \varphi(u))^{-1} \cdot f_u(u, \varphi(u))$$

$$(b) \quad Df(x, y, z) = \left(\overbrace{e^{x+y+z} + 2x}^{f_x}, \overbrace{e^{x+y+z} + 2y}^{f_y}, \overbrace{e^{x+y+z} + 2z}^{f_z} \right) \quad (2)$$

$$\Rightarrow Df(1, 1, 0) = \left(e^2 + 2, e^2 + 2, \underbrace{e^2}_{\det \det \neq 0} \right)$$

$\Rightarrow$ es gibt φ wie angegeben

$$\nabla \varphi(x, y) = (D\varphi(x, y))^T = \left(- \left(e^{x+y+z} + 2z \right)^{-1} \cdot \left(e^{x+y+z} + 2x, e^{x+y+z} + 2y \right) \right)^T$$

$$= \begin{pmatrix} - \frac{e^{x+y+z} + 2x}{e^{x+y+z} + 2z} \\ - \frac{e^{x+y+z} + 2y}{e^{x+y+z} + 2z} \end{pmatrix}$$

wobei $z = \varphi(x, y)$.

Es ist $\varphi(1, 1) = 0$. Also:

$$\nabla \varphi(1, 1) = \begin{pmatrix} - \frac{e^2 + 2}{e^2} \\ - \frac{e^2 + 2}{e^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - 2e^{-2} \\ -1 - 2e^{-2} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Tangentialebene an Π in $(1, 1, 0)$:

$$z = \varphi(1, 1) + \langle \nabla \varphi(1, 1), \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} \rangle$$

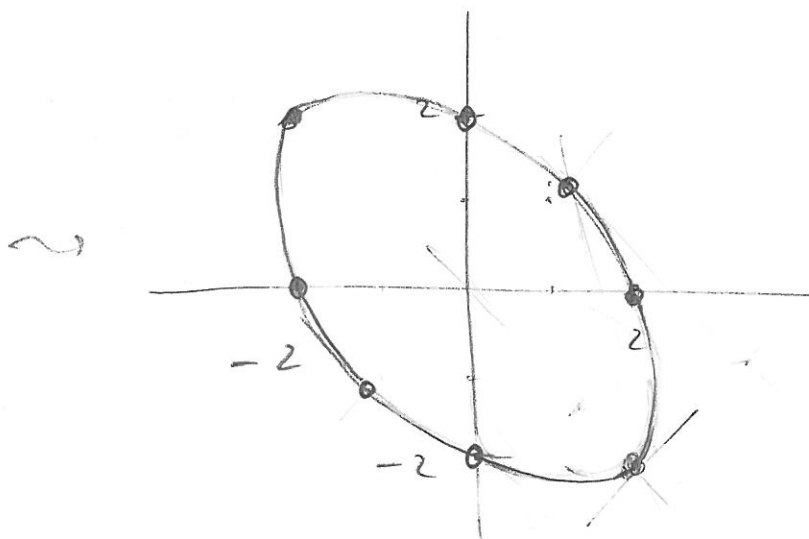
$$= 0 + (-1 - 2e^{-2})(x-1) + (-1 - 2e^{-2})(y-1)$$

$$(a) \quad (2, 0), (-2, 0) \in K$$

$$(0, 2), (0, -2) \in K$$

$$x = -y \Rightarrow (2, -2), (-2, 2) \in K$$

$$x = y \Rightarrow \left(\underbrace{\frac{2}{\sqrt{3}}}_{\approx 1,15}, \frac{2}{\sqrt{3}} \right), \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}} \right) \in K$$



K Mannigfaltigkeit: Ja, denn

$$\text{wobei } x^2 + xy + y^2 - 4 = f(x, y)$$

$$\text{ist } \nabla f = (2x+y, x+2y)$$

$$\text{und also } \nabla f = (0, 0) \Rightarrow (x, y) = (0, 0) \\ \Rightarrow (x, y) \notin K.$$

$$\text{Somit ist } \text{rang } \nabla f(p) = 1$$

$$\text{für alle } p \in K \Rightarrow \text{alle } p \in K \\ \text{regulär}$$

(b) Es ist $f_y(2, -2) = -2 \neq 0$,

also existiert y wie angegeben.
Insbes: $y(2) = -2$.

(c)
$$\varphi'(x) = - \frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))}$$

$$\varphi''(x) = - \frac{(f_{xx} + f_{xy} \varphi'(x)) f_y - f_x (f_{yx} + f_{yy} \varphi'(x))}{f_y^2}$$

ausgewertet bei $(x, \varphi(x))$

Wählt man $\forall x \in U$ mit $f_y(x, \varphi(x)) \neq 0$

für $x \in U$, dann ist φ'' existiert und stetig.

(d)
$$\varphi'(2) = - \frac{f_x(2, -2)}{f_y(2, -2)} = - \frac{2}{-2} = 1$$

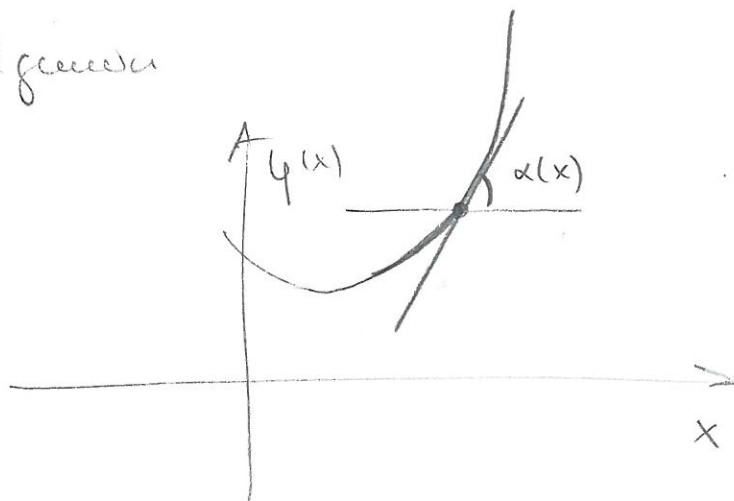
Hessematrix
$$\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} (x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\varphi''(2) = - \frac{(2 + 1 \cdot 1) \cdot (-2) - 2 \cdot (1 + 2 \cdot 1)}{(-2)^2}$$

$$= 3$$

Krümmungsradius: Herleitung für Formel

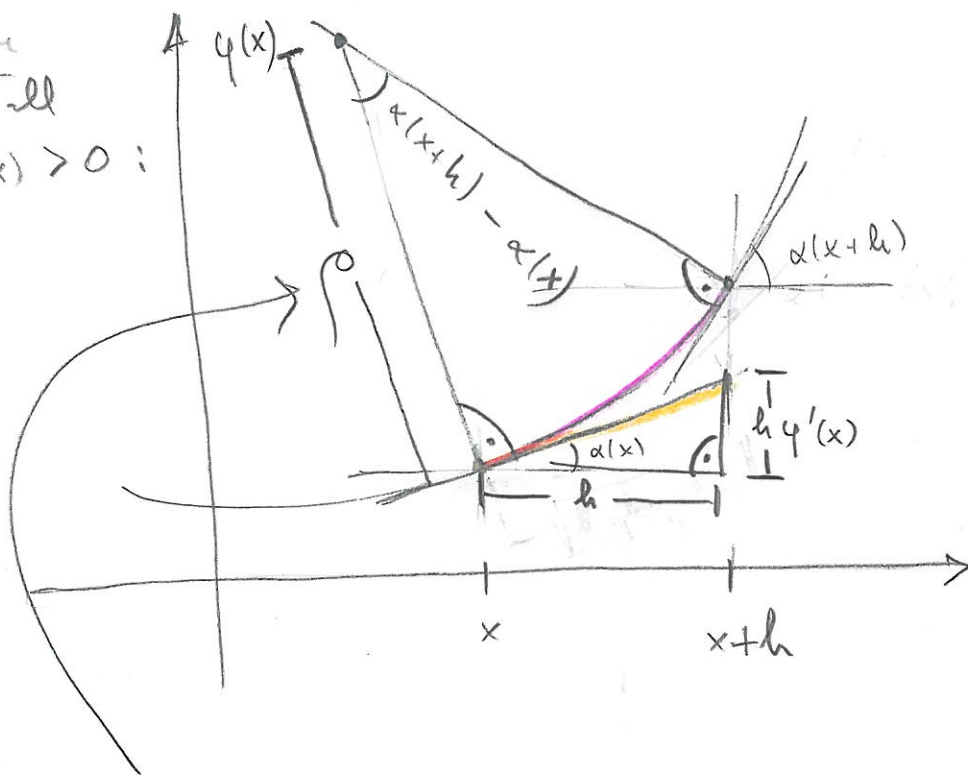
Allgemein



$$\alpha(x) = \arctan y'(x)$$

$$\alpha'(x) \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \frac{1}{1 + y'(x)^2} \cdot y''(x)$$

Skizze
im Fall
 $y''(x) > 0$:



Krümmungsradius

$$\stackrel{1.}{\approx} \rho \cdot (\alpha(x+h) - \alpha(x))$$

$$\stackrel{2.}{\approx} \left(h^2 + (h \varphi'(x))^2 \right)^{1/2} = h \left(1 + \varphi'(x)^2 \right)^{1/2}$$

"für h
=>
klein"

$$\begin{aligned} & \rho \cdot \frac{1}{1 + \varphi'(x)^2} \cdot \varphi''(x) \\ &= \rho \cdot \alpha'(x) \\ &= \left(1 + \varphi'(x)^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{\left(1 + \varphi'(x)^2 \right)^{3/2}}{\varphi''(x)}$$

Analog der Fall $\varphi''(x) < 0$; betrachte $-\varphi$.

Jedenfalls

$$\rho = \left| \frac{\left(1 + \varphi'(x)^2 \right)^{3/2}}{\varphi''(x)} \right|$$

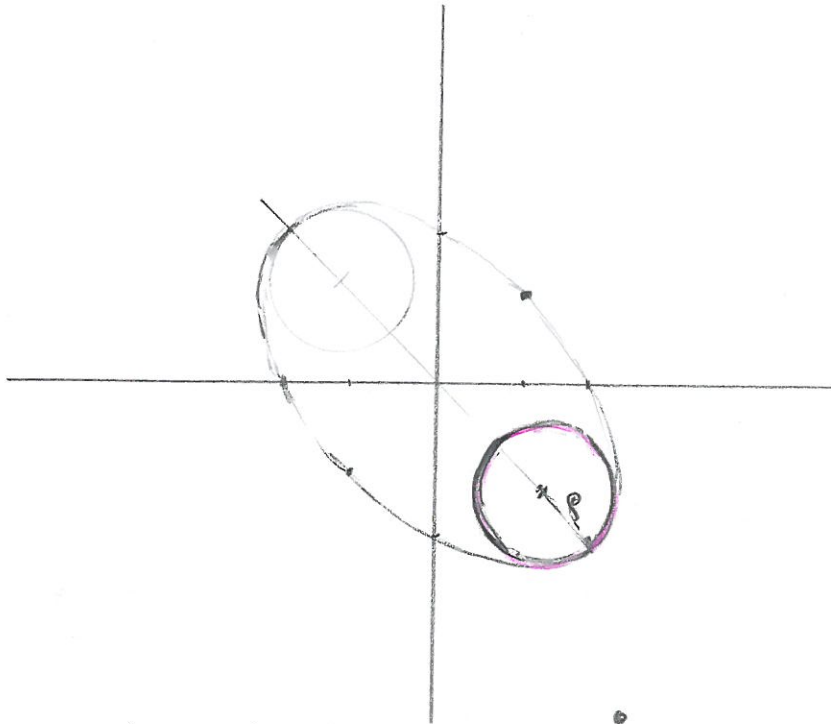
I

Bei uns:

$$\rho = \left| \frac{(1 + 1^2)^{3/2}}{3} \right| = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\approx 0,94$$

(e) : Wie in (a), nur genauer
und mit Krümmungskreis:



3.3. Wir schreiben $y = \dot{x}$.

Es ist die Energie

$$E(x, y) = \frac{1}{2} y^2 + V(x).$$

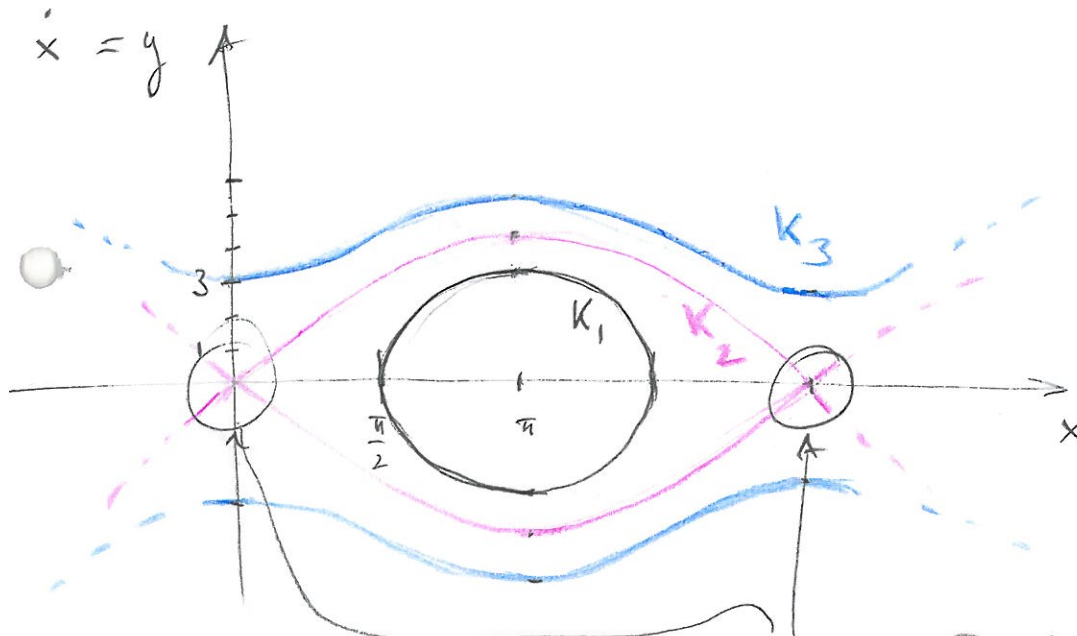
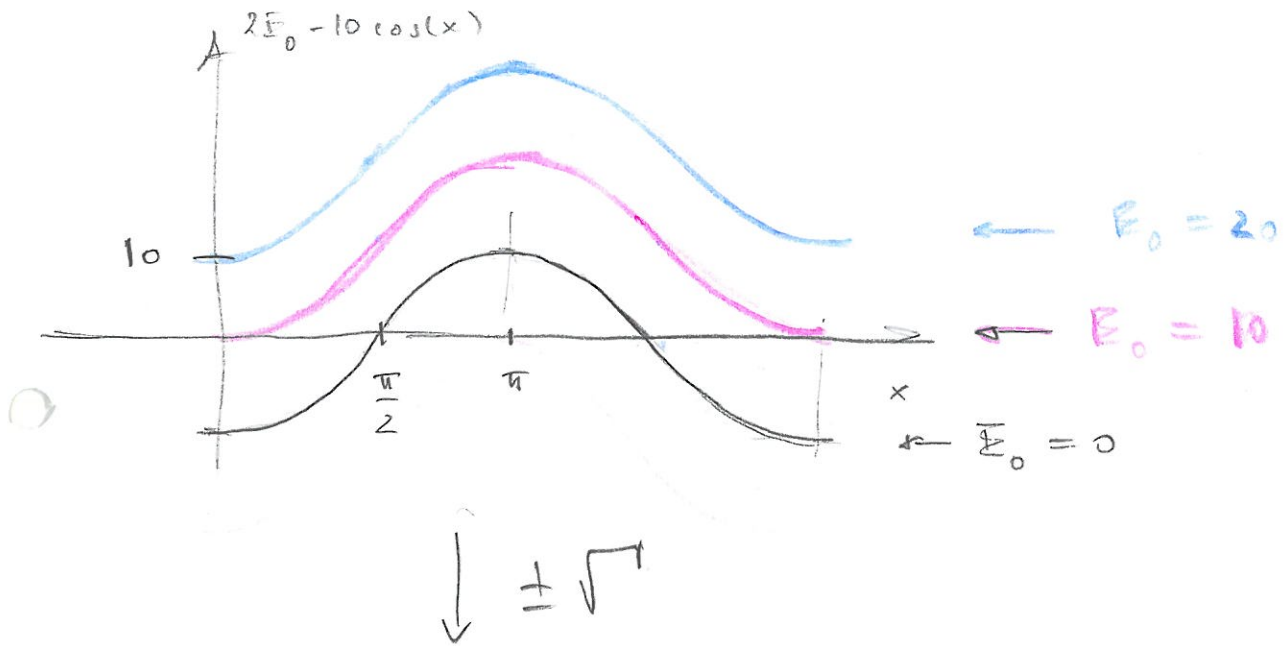
$$= \frac{1}{2} y^2 + 10 \cos(x)$$

Wir suchen Niveaulinien der
Energie festlegen.

$$\text{Lsg} \quad \frac{1}{2} y^2 + 10 \cos(x) = E_0$$

Damen Nr

$$y = \pm \sqrt{2E_0 - 20 \cos(x)}$$



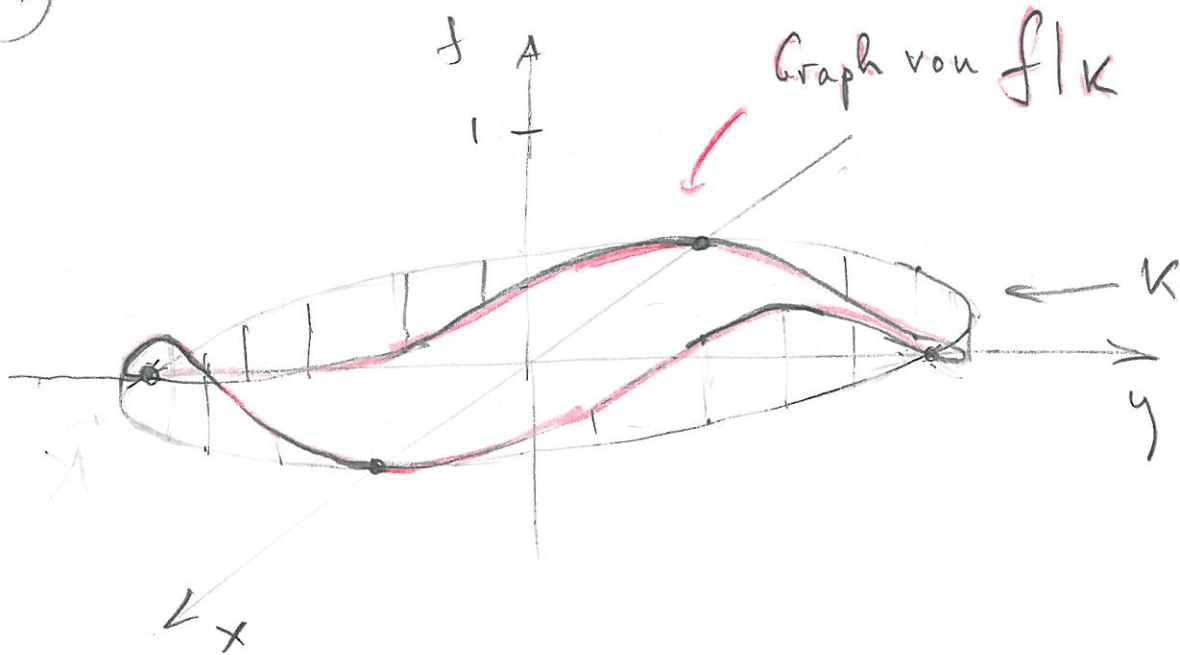
kritische Punkte:

$$\nabla E = \begin{pmatrix} -10 \sin(x) \\ y \end{pmatrix},$$

also $\nabla E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gdw. $x \in \mathbb{Z}\pi, y = 0$

4.1

a



$$(b) \quad \nabla f + \lambda \nabla g = \begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + 2x\lambda = 0 \\ (2x + 2\lambda)y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Fall $y \neq 0$:

$$\lambda = -x$$

$$y^2 = 2x^2$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$\leadsto 3x^2 = 1 \leadsto x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}, y = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$$

↖ weibl. ↗
Vorzeichen!

$\leadsto$ kritische Stellen

$$P_1 = \left(\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}} \right), P_2 = \left(\sqrt{\frac{1}{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}} \right),$$

$$P_3 = \left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}} \right), P_4 = \left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}} \right)$$

Fall $y = 0$: $x = \pm 1, \lambda = 0$

$\leadsto$ kritische Stellen

$$P_5 = (1, 0), P_6 = (-1, 0)$$

(c) K kompakt

$\Rightarrow \exists$ globaler Max, Min,
tenden unter bestimmten
Stellen auf.

$$f(P_1) = f(P_2) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$f(P_3) = f(P_4) = -\frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$f(P_5) = f(P_6) = 0$$

$\Rightarrow P_3, P_4, P_5, P_6$ nicht glob. Max

$\Rightarrow P_1, P_2$ glob. Max

Dito: P_3, P_4 glob. Min.

(d) $P_6: B = \text{Bogen}$ über P_3, P_6, P_4
 $f|_B$ hat glob. Max, nicht am Rand

$$(f(P_3), f(P_4) < f(P_6))$$

$\Rightarrow$ glob. Max. für Bogen bei P_6

$\Rightarrow$ lok. Max. bei P_6

P_5 : analog lok. Min bei P_5 .

$$(e) \quad K = \{ (\cos(t), \sin(t)) : t \in \mathbb{R} \}$$

$$u(t) = f(\cos(t), \sin(t)) = \cos(t) \sin(t)^2$$

$$u'(t) = -\sin(t)^3 + 2\cos(t)^2 \sin(t)$$

$$= \sin(t) (2\cos(t)^2 - \sin(t)^2)$$

$$= \sin(t) (3\cos(t)^2 - 1) = 0$$

falls $\sin(t) = 0 \quad (\Rightarrow \cos(t) = \pm 1)$

oder $\cos(t) = \pm \sqrt{\frac{1}{3}} \quad (\Rightarrow \sin(t) = \pm \sqrt{\frac{2}{3}})$

$\swarrow$ VZ unabh.

$\Rightarrow P_1, \dots, P_6$ wie oben

$$u''(t) = \cos(t) (3\cos(t)^2 - 1)$$

$$+ \sin(t) (-3 \cdot 2 \cdot \cos(t) \cdot \sin(t))$$

$\Rightarrow u''(t)$ hat bei P_1, P_2, P_3, P_4

das VZ von $-\cos(t)$

also P_1, P_2 lok. Max, P_3, P_4 lok. Min,

$u''(t)$ hat bei P_5, P_6 das VZ von $\cos(t)$,

also P_5 lok. Min, P_6 lok. Max.

Suchen:

5

4.2

Kritische Stelle für $(a, b, c) \in \mathbb{R}_{>0}^3$.

$$\nabla V - \lambda \nabla F = \begin{pmatrix} bc \\ ac \\ ab \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} b+2c \\ a+2c \\ 2b+2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$ab + 2bc + 2ac = 1$$

$$\Rightarrow (b-a)c = \lambda(b-a)$$

Fall $a \neq b$: $c = \lambda$,

$$ac = ac + 2c^2$$

$$\Rightarrow c = 0 \quad \downarrow$$

Fall $a = b$.

$$\begin{cases} bc = \lambda(b+2c) \\ b^2 = \lambda \cdot 4b \\ b^2 + 4bc = 1 \end{cases}$$

$$b \neq 0 \Rightarrow \lambda = b/4$$

$$\Rightarrow c = \frac{b}{4} + \frac{c}{2}$$

$$\Rightarrow b = 2c \Rightarrow 12c^2 = 1$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{2\sqrt{3}}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad a = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\left(\lambda = \frac{1}{4\sqrt{3}} \right)$$

$$\text{Volumen } \frac{1}{6\sqrt{3}} = V\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$$

○ [für lokales Max.:

$$c = 1 - \frac{ab}{2(a+b)}$$

$$V = ab - \frac{a^2 b^2}{2(a+b)}$$

○ Hessewahrk:

$-\frac{b^4}{(a+b)^3}$	$-\frac{a^3 b + 3a^2 b^2 + ab^3 - a^3 - 3a^2 b - 3ab^2 - b^3}{(a+b)^3}$
*	$-\frac{a^4}{(a+b)^3}$

$$\text{Bei } (a, b) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right); \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{24}\sqrt{3} & 1 - \frac{5}{24}\sqrt{3} \\ 1 - \frac{5}{24}\sqrt{3} & -\frac{1}{24}\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{neg. def. (det} = -\frac{9}{8} + \frac{5}{12}\sqrt{3} \approx -0,4)$$

$\Rightarrow$ lok. Max.

4.3

$$\text{Sei } P = (u_1, u_2, u_3)$$

$$Q = (v_1, v_2, v_3)$$

$$f(u, v) = (u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + (u_3 - v_3)^2$$

$$P \in g \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - u_2 = 0 \\ u_1 - u_3 = 0 \end{cases}$$

$$Q \in h \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 + v_3 = 1 \end{cases}$$

Nebenbed.:

$$a_1(u, v) = u_1 - u_2$$

$$a_2(u, v) = u_1 - u_3$$

$$a_3(u, v) = v_1$$

$$a_4(u, v) = v_2 + v_3 - 1$$

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda_1 \nabla a_1 + \lambda_2 \nabla a_2 + \lambda_3 \nabla a_3 + \lambda_4 \nabla a_4 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \\ a_4 = 0 \end{cases}$$

Lagrange

$$\left\{ \begin{array}{l} 2(u_1 - v_1) = \lambda_1 + \lambda_2 \\ 2(u_2 - v_2) = -\lambda_1 \\ 2(u_3 - v_3) = -\lambda_2 \\ 2(v_1 - u_1) = \lambda_3 \\ 2(v_2 - u_2) = \lambda_4 \\ 2(v_3 - u_3) = \lambda_4 \\ \\ u_1 = u_2 \\ u_1 = u_3 \\ v_1 = 0 \\ v_2 + v_3 = 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3u_1 \\ u_1 - v_1 + u_2 - v_2 + u_3 - v_3 = 0 \\ v_2 - u_2 = v_3 - u_3 \\ u_1 = u_2 \\ u_1 = u_3 \\ v_1 = 0 \\ v_2 + v_3 = 1 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow v_2 = v_3 = \frac{1}{2}, v_1 = 0 \\ u_1 = \frac{1}{3} = u_2 = u_3$$

$$\Rightarrow P_{\min} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right),$$

$$Q_{\min} = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

$$\text{Abstand} = \sqrt{\frac{1}{6}}.$$

$$(c) \quad \vec{PQ}_{\min} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \right) \quad (1.) \text{ senkrecht auf } (1,1,1)$$

$$\Rightarrow k \perp g$$

$$(2.) \text{ senkrecht auf } (0,1,-1)$$

$$\Rightarrow k \perp h$$

$$(b) \quad g = \{ (s, s, s) : s \in \mathbb{R} \}$$

$$h = \{ (0, t, 1-t) : t \in \mathbb{R} \}$$

Abstand zum Quadrat:

$$\begin{aligned} w(s, t) &:= s^2 + (s-t)^2 + \underbrace{\left(s - (1-t) \right)^2}_{s+t-1} \\ &= 3s^2 + 2t^2 - 2s - 2t + 1 \end{aligned}$$

$$\nabla w = \begin{pmatrix} 6s - 2 \\ 4t - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow s = \frac{1}{3}, t = \frac{1}{2}$$

$$\text{Hessematrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ pos def} \Rightarrow \text{lok. Min.}$$

5.1

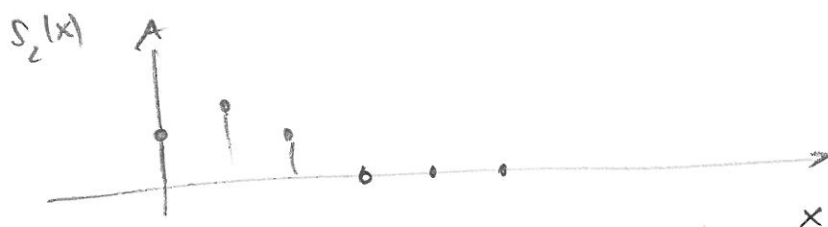
(a) $f_a \in M'_S(\mu) : \quad \text{Ggz: } f_a \in U'(\mu).$

Für $k \geq 0$ sei $s_k = \sum_{i=0}^k \chi_{[i, i+1)} a_i$.

Es ist s_k eine Treppenfkt.

Es ist $(s_k)_{k \geq 0}$ monoton steigend

und $f_a = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k$ punktweise.



Berechnung $\int f_a d\mu$:

$f_a = f_a - 0$ zulässig

$$\Rightarrow \int f_a d\mu = I_\mu(f_a) - I_\mu(0)$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} I_\mu(s_k)$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^k \underbrace{\mu([i, i+1))}_{=1} a_i$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} a_i$$

(b) Sei z.B. $a_n := \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ für $n \geq 0$

Sei $c_n := \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{f. } n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$b_n := \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{f. } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

○ $a_n = c_n - b_n$ stets.

$\Rightarrow f_a = f_c - f_b \in \mathcal{M}'(\mu)$,
da $f_c, f_b \in \mathcal{U}'(\mu)$, und (sogar)
überall endlich

● Sei nun $f_a = u_1 - u_2$ mit $u_1, u_2 \in \mathcal{U}'(\mu)$.

Dann $u_1 = f_a + u_2 \geq f_a$
 $u_1 \geq 0$

$\Rightarrow u_1 \geq f_c$

$\Rightarrow I_\mu(u_1) \geq I_\mu(f_c) = \infty$.

3

Daher $I_{\mu}(u_2) \geq I_{\mu}(f_0) = \infty$.

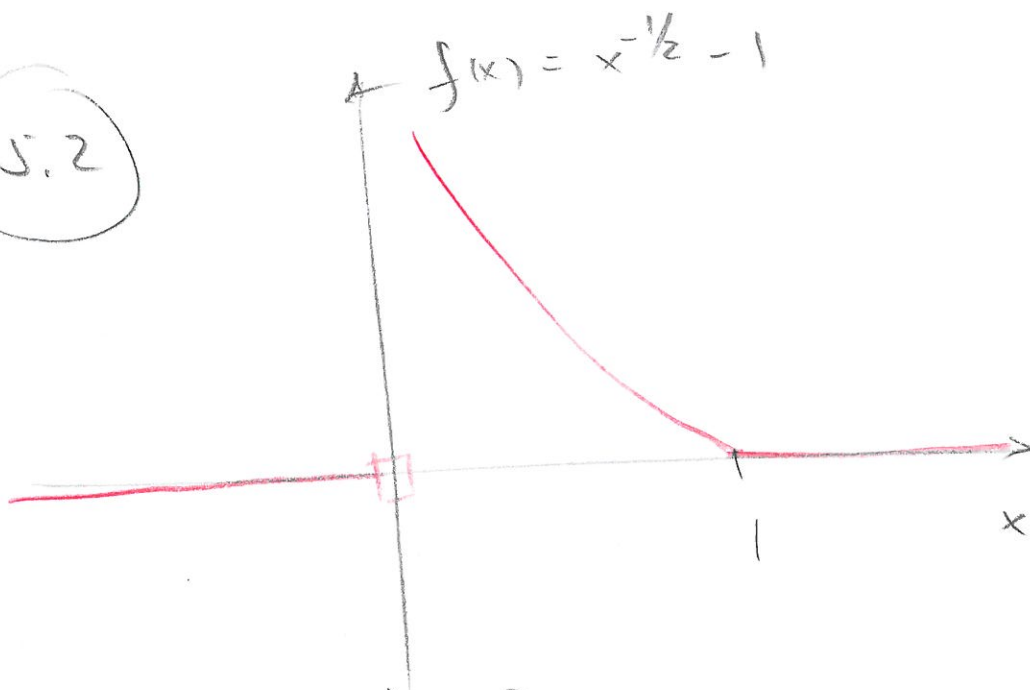
Also $f_0 = u_1 - u_2$ nicht zulässig.

Also $f_0 \notin M'_s(\mu)$.

Also $\sum_{n \geq 0} a_n$ konvergent nach Leibniz.

$$= \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$$

5.2



(a) Sei $k \geq 2$.

$f|_{[1/k, 1]}$ stetig, $[1/k, 1]$ kompakt

$\Rightarrow f|_{[1/k, 1]}$ gleichmäßig stetig

$\Rightarrow \exists$ Treppenfkt $t_k : [\frac{1}{k}, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

wobei $0 \leq t_k \leq f|_{[\frac{1}{k}, 1]}$

und $f(x) - t_k(x) < \frac{1}{k}$

für $x \in [\frac{1}{k}, 1]$.

Sei $u_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} t_k(x) & \text{f. } x \in [\frac{1}{k}, 1] \\ f(\frac{1}{k}) & \text{f. } x \in [0, \frac{1}{k}) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Sei $s_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \max_{2 \leq l \leq k} u_l(x)$

Dann: $(s_k)_k$ monoton steigende

Folge von Treppenfkt.,

wobei $u_k \leq s_k \leq f$.

Punktweise Konvergenz:

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$

Für $x_0 \notin [0, 1] : 0 = s_k(x_0) \rightarrow f(x) = 0$

Für $x_0 = 0 : u_k(0) = f(\frac{1}{k}) = \sqrt{k} - 1 \rightarrow \infty$

$\Rightarrow s_k(0) \rightarrow \infty$

Fall $x_0 \in (0, 1]$. Sei $\varepsilon > 0$ geg.

5

Sei $k \geq 2$ mit $\frac{1}{k} < x_0 \wedge \frac{1}{k} \leq \varepsilon$.

Dann:

$$\begin{aligned} f(x_0) - s_k(x_0) &\leq f(x_0) - u_k(x_0) \\ &= f(x_0) - t_k(x_0) \\ &< \frac{1}{k} \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

(b) Sei

$$g_k := \sum_{l=1}^k \chi_{(2^{-l}, 2^{-l+1}]} \cdot f(2^{-l})$$

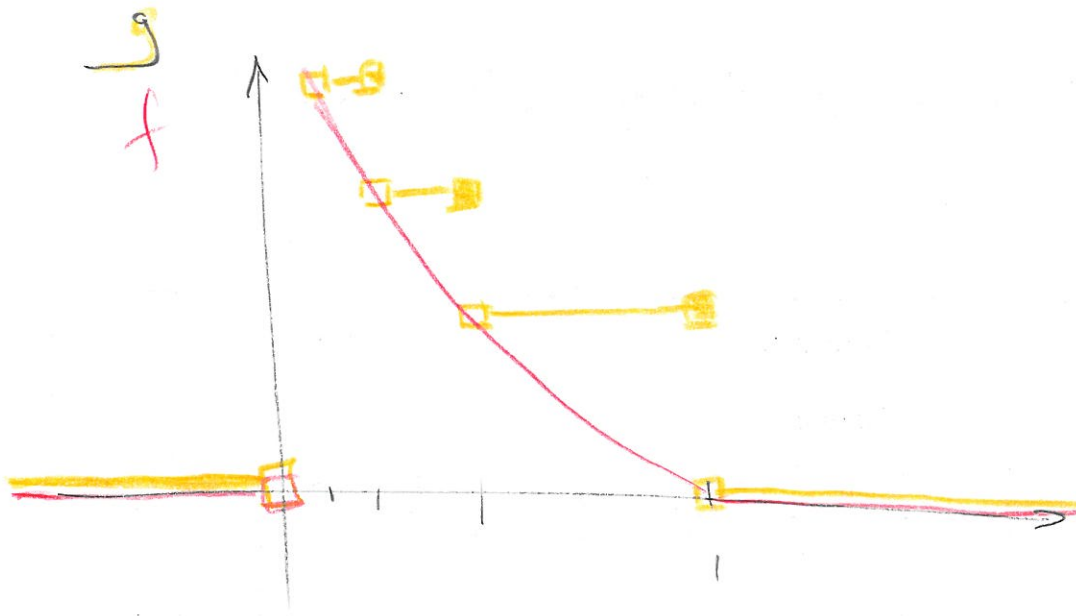
Also $(g_k)_{k \geq 1}$ monoton

steigende Folge von

Treppenf.

Sei $g := \lim_{k \rightarrow \infty} g_k$.

Dann $g \in \mathcal{U}'(\mu)$, $g \geq f$.



$$I_{\lambda_1}(g) = \lim_{k \rightarrow \infty} I_{\lambda_1}(g_k)$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{l=1}^k \lambda_1(2^{-l}, 2^{-l+1}] f(2^{-l})$$

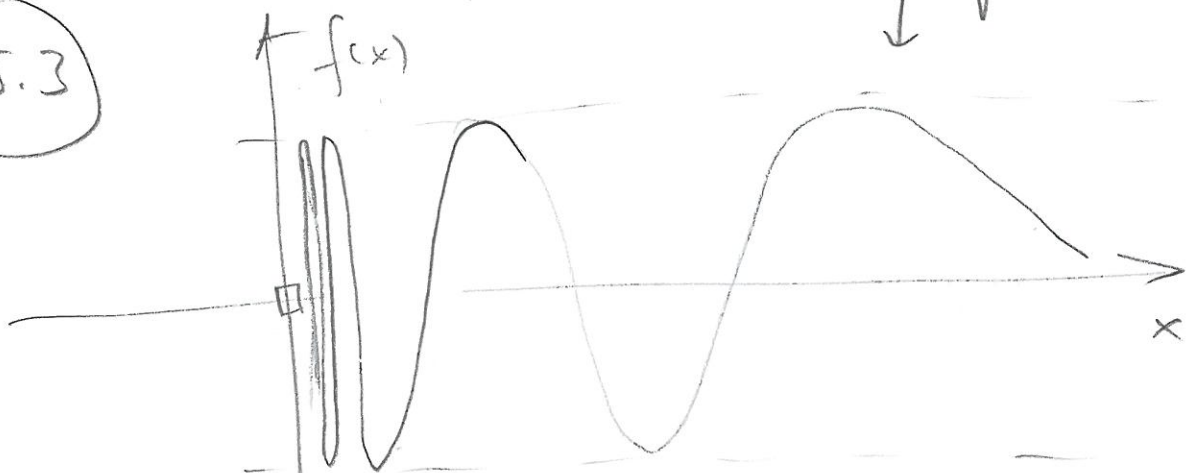
$$= \sum_{l=1}^{\infty} 2^{-l} (2^{l/2} - 1) < \infty$$

geometrische
Reihe

Also $I_{\lambda_1}(f) \leq I_{\lambda_1}(g) < \infty$.

qualitativ

5.3



Sei $\varepsilon > 0$. Suchen Überdeckung
des Graphen $\mathcal{P}(f)$ durch

Intervalle mit Gesamthalt $\leq \varepsilon$.

7

Datum:

$$\Gamma(f|_{[0, \frac{\varepsilon}{4}]}) \subseteq \underbrace{[0, \frac{\varepsilon}{4}] \times [-1, +1]}_{\text{Inhalt } \frac{\varepsilon}{2}}$$

○ Für $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$$\Gamma(f|_{[\frac{\varepsilon}{4} + k, \frac{\varepsilon}{4} + k + 1]}) \subseteq \left(\begin{array}{l} \text{Intervall überdeckung} \\ \text{mit Gesamthalt} \\ \leq \varepsilon \cdot 2^{-(k+2)} \end{array} \right)$$

Lehrsatz:

○ Sei $a \leq b$, sei $u: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Also u glw. stetig.

Sei $\alpha > 0$. Es gibt $n \geq 1$

und $a = c_0 \leq c_1 \leq \dots \leq c_n = b$

mit $c_{i+1} - c_i = \frac{b-a}{n}$ stets und

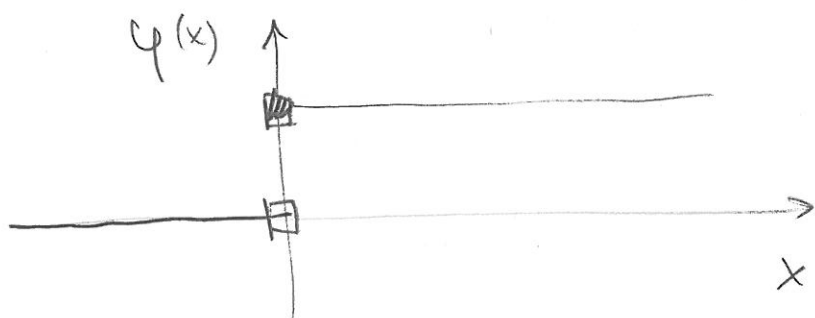
$$\max(u|_{[c_i, c_{i+1}]}) - \min(u|_{[c_i, c_{i+1}]}) < \alpha$$

stets

$\leadsto$ $\exists$ Intervallüberdeckung des Graphen
 von α mit Inhalt $< \frac{1}{n} \cdot (b-a) \cdot \alpha \cdot n$
 $= (b-a) \cdot \alpha$

5.4

Sei $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{f. } x < 0 \\ 1 & \text{f. } x \geq 0 \end{cases}$



φ monoton steigend

Sei $\mu: \mathcal{I}' \rightarrow \mathbb{R}$ erklärt durch

$$\mu((a, b)) := \varphi(b) - \varphi(a)$$

$$\mu([a, b)) := \varphi(b) - \varphi(a)$$

$$\mu((a, b]) := \varphi(b) - \varphi(a)$$

$$\mu([a, b]) := \varphi(b) - \varphi(a)$$

für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$.

- (i) μ additiv nach Konstruktion
 (ii) μ monoton wg φ monoton steigend
 (iii) μ regulär?

Nein: $\mu([0, 1]) = \varphi(1) - \varphi(0)$

$\in \mathbb{J}' \quad = 1 - 1 = 0$

Ist $I_0 \checkmark$ offen mit $I_0 \supseteq [0, 1]$,

dann ist $I_0 = (a, b)$ mit

$a < 0$ und $b > 1$

Dann: $\mu(I_0) = \mu((a, b))$
 $= \varphi(b) - \varphi(a)$

$= 1 - 0 = 1$

Für z.g. $\varepsilon = \frac{1}{2}$ gibt es also kein

solches I_0 mit $\mu(I_0) - \mu(I) < \varepsilon$.

Sei

$$\mu: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{Maß}$$

Werkzeuge:

Lebesgue:

$$\begin{cases} f_k \in L^u(\mu) & \text{für } k \geq 0 \\ f_k \xrightarrow{\mu} f \end{cases}$$

$$\exists g \in L^u(\mu) \text{ mit } |f_k| \leq g \text{ für } k \geq 0.$$

Dann: $f \in L^u(\mu)$, genau:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\lim_k f_k \right) d\mu = \lim_k \int_{\mathbb{R}^n} f_k \, d\mu.$$

Majorantenkrit.:

$$\begin{cases} f \in M^u(\mu) \\ |f| \leq g \in L^u(\mu) \end{cases} \quad \leftarrow \text{Differenz von zwei approximablen, die f.ö. vgl. sind}$$

$$\Rightarrow f \in L^u(\mu), \text{ wobei } \int_{\mathbb{R}^n} |f| \, d\mu \leq \int_{\mathbb{R}^n} g \, d\mu.$$

Vorbemerkung:

$$g \in \mathcal{L}^u(\mu) \Rightarrow |g| \in \mathcal{L}^u(\mu).$$

Dann:

$$g = u - v \quad \text{mit} \quad u, v \in \mathcal{U}^u(\mu)$$

$$\text{mit} \quad u, v \leq_\mu \infty$$

$$\text{und} \quad \int_\mu(u), \int_\mu(v) < \infty.$$

○ $G_{22}: g_+ \in \mathcal{L}^u(\mu)$

$$g_+ = \max\{u, v\} - v.$$

$$G_{22}: \max\{u, v\} \in \mathcal{L}^u(\mu)$$

$$\int_\mu(\max\{u, v\})$$

$$\leq \int_\mu(u+v) = \int_\mu(u) + \int_\mu(v) < \infty.$$

6.1

$$f: I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Schreiben $f_t(x) := f(t, x)$

Sei $f_t \in M^+(\mu)$ stets

(a) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Sei } t \mapsto f(t, x) \text{ stetig f\"ur } \mu\text{-f\"ur alle } x. \\ \text{Sei } g \in L^1(\mu) \text{ existiert} \\ \text{mit } |f_t| \leq_\mu g \text{ stets.} \end{array} \right.$

Dann: $f_t \in L^1(\mu)$ stets!

$F(t) := \int_{\mathbb{R}^n} f_t d\mu$ stetig in t !

Bew. $f_t \in L^1(\mu)$: Majorantenkrit.

F stetig:

Sei $a \in I$. Sei $(t_k)_k$ Folge in I

mit $t_k \rightarrow a$. Zz: $\int_{\mathbb{R}^n} f_{t_k} d\mu \xrightarrow{!} \int_{\mathbb{R}^n} f_a d\mu$.

Es gilt $|f_{t_k}| \leq_\mu g$ stets

Lebesgue $\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f_a d\mu = \lim_k \int_{\mathbb{R}^n} f_k d\mu$

$= \lim_k \int_{\mathbb{R}^n} f_k d\mu$

beachte

$f_{t_k} \xrightarrow{\mu} f_a$
u.V. an f

$$(b) \begin{cases} \bullet \exists a \in I \text{ mit } f_a \in \mathcal{L}^n(\mu) \\ \bullet f'_t(x) := \partial_s \left(f_s(s, x) \right) \Big|_{s=t} \text{ ex. stets} \\ \bullet \exists g \in \mathcal{L}^n(\mu) \text{ mit } |f'_t| \leq_\mu g \text{ stets} \end{cases}$$

Dann: $\bullet f_t \in \mathcal{L}^n(\mu)$ stets

$\bullet F(t) := \int_{\mathbb{R}^n} f_t d\mu$ diff'bar

mit

$$F'(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f'_t d\mu$$

Bew. Für $s, t \in I$, $s \neq t$, und fast alle $x \in \mathbb{R}^n$:

$$(*) \quad \left| \frac{f(s, x) - f(t, x)}{s - t} \right| \stackrel{\text{MWS}}{\leq} \sup_{s \in I} |\partial_s f(s, x)| \leq g(x)$$

Also für $t \neq a$:

$$|f(t, x)| = |f(t, x) - f(a, x) + f(a, x)|$$

$$\leq |f(a, x)| + |f(t, x) - f(a, x)|$$

$$(*) \leq |f(a, x)| + g(x) \cdot |t - a|$$

int'bar für alle t
(als Konstante, in $\mathcal{L}^n(\mu)$)

Maj'korb. $\Rightarrow f_t$ reib'bar.

Sei nun $t_k \rightarrow t$ in I , $t_k \neq t$.

Zz:
$$\frac{F(t_k) - F(t)}{t_k - t} \xrightarrow{!} \int_{\mathbb{R}^n} f'_t d\mu.$$

$$\lim_k \frac{F(t_k) - F(t)}{t_k - t} = \lim_k \frac{\int_{\mathbb{R}^n} f_{t_k} d\mu - \int_{\mathbb{R}^n} f_t d\mu}{t_k - t}$$

$$= \lim_k \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f_{t_k} - f_t}{t_k - t} d\mu = \dots$$

Durch (*) S. 3: $g(x)$ Majorante des Betrags des Integranden für alle k .

Integrand konvergiert gegen f'_t (punktweise)

Lebesgue $\Rightarrow$

$$\dots = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_k \frac{f_{t_k} - f_t}{t_k - t} d\mu$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f'_t d\mu$$

6.2

$$(a) \text{ Sei } f(t, x) = \begin{cases} x^{t-1} e^{-x} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{Also } \partial_t f(t, x) = \begin{cases} \ln(x) x^{t-1} e^{-x} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

O.E. $t \in (1, \beta)$ mit $\beta \in \mathbb{R}_{>1}$

$$\text{Also } |\partial_t f(t, x)| \leq \begin{cases} \ln(x) x^{\beta-1} e^{-x} & \text{für } x \geq 1 \\ -\ln(x) x^{t-1} e^{-x} & \text{für } x \in (0, 1) \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

$$=: g(x)$$

und $g(x)$ ist

Cauchy-integrierbar, also
Lebesgue-integrierbar.

Also ist mit $f_t(x) := f(t, x)$

auch $f_t: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ int'bar für $t \in (1, \beta)$

und

$$\begin{aligned} \Gamma'(t) &= \partial_t \left(\int_{\mathbb{R}} f_t d\lambda^1 \right) = \int_{\mathbb{R}} \partial_t f_t d\lambda^1 \\ &= \int_0^\infty \ln(x) x^{t-1} e^{-x} \end{aligned}$$

(b) • Sei $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ sei

$$\int_{\mathbb{R}} u \, d\lambda^1 := \int_{\mathbb{R}} \operatorname{Re}(u) \, d\lambda^1 + i \int_{\mathbb{R}} \operatorname{Im}(u) \, d\lambda^1,$$

falls letztere Integrale existieren.

- Wir werden stücksweise vorgehen,
d.h. für $z \in \mathbb{C}$ gilt: $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$,
 $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$.

Es ist

$$|g(x) e^{-itx}| = |g(x)|$$

integrierbare
Majorante

6.1(a)

$\Rightarrow$

$g(x) e^{-itx}$ int'bar für $t \in \mathbb{R}$,
(versteht sich aus Re und Im) $\hat{g}(t)$ stetig in t

$$\partial_t (g(x) e^{-itx}) = -ix g(x) e^{-itx}$$

$$\Rightarrow |\partial_t (g(x) e^{-itx})| \stackrel{\text{reelles } \leq}{=} |x g(x)| = \underbrace{|v(x)|}_{\text{int'bare Majorante}}$$

6.1.6)

 $\Rightarrow$ $\hat{g}$ diff'bar weil

$$\begin{aligned}
 \partial_t \hat{g}(t) &= \int_{\mathbb{R}} \partial_t (g(x) e^{-itx}) dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}} -ix g(x) e^{-itx} dx \\
 &= -i \int_{\mathbb{R}} v(x) e^{-itx} dx \\
 &= -i \hat{v}(t),
 \end{aligned}$$

Ober wurde schon gezeigt:

$$v \in \mathcal{L}'(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{v} \text{ stetig.}$$

Also $\hat{g}$ stetig diff'bar.

7.1

$$\begin{aligned}(a) \quad & \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{x}{x^2+y^2} \right) \\&= -\frac{1 \cdot (x^2+y^2) - x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} \\&= f(x,y) \quad (\text{auf } \text{bis } (0,0))\end{aligned}$$

$$(b) \cdot \int_0^1 \int_0^1 f(x,y) dx dy$$

$$\stackrel{(a)}{=} \int_0^1 \left[-\frac{x}{x^2+y^2} \right]_{x=0}^{x=1} dy$$

$$= \int_0^1 -\frac{1}{1+y^2} dy$$

$$= \left[-\arctan(y) \right]_0^1 = -\frac{\pi}{4}$$

$$\cdot \int_0^1 \int_0^1 f(x,y) dx dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dx dy$$

$$\stackrel{\text{unverändert}}{=} \int_0^1 \int_0^1 \frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2} dy dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 (-f(x,y)) dy dx \stackrel{\text{s.o.}}{=} +\frac{\pi}{4}$$

$$(c) \int_{[0,1] \times [0,1]} |f| d\lambda_2$$

$$\stackrel{\text{Tonelli}}{=} \int_0^1 \int_0^1 |f(x,y)| dx dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^y |f(x,y)| dx dy$$

$$+ \int_0^1 \int_y^1 |f(x,y)| dx dy$$

$$\text{but: } \int_0^1 \int_y^1 |f(x,y)| dx dy = \infty$$

$$y \neq 0, x \in [y, 1] \Rightarrow |f(x,y)| = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\text{Also } \int_0^1 \int_y^1 |f(x,y)| dx dy$$

$$= \int_0^1 \int_y^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$$

$$\stackrel{(a)}{=} \int_0^1 \left[-\frac{x}{x^2 + y^2} \right]_y^1 dy$$

$$= \int_0^1 \underbrace{-\frac{1}{1+y^2}}_{\text{easier to integrate}} - \underbrace{\left(-\frac{y}{y^2+y^2}\right)}_{+\frac{1}{2y}} dy = \infty$$

(d) Nein, $\tilde{f}$ ist nicht integrierbar,

Wäre $\tilde{f}$ int'bar, dann würde

Folgendes gelten, im Widerspruch zu (b),

Alternativ:

Wäre $\tilde{f}$ int'bar, dann wäre

$|\tilde{f}|$ int'bar, im Widerspruch zu (c),

7.2

$$(a) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

$$r = \left| \det \begin{pmatrix} c_y & -r s_y \\ s_y & r c_y \end{pmatrix} \right|$$

$$\stackrel{\text{Polarkoord.}}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \underbrace{e^{-r^2} r}_{\text{konstant in } \varphi} dr d\varphi$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-r^2} \cdot \underbrace{2r}_{du} dr$$

$$\stackrel{u=r^2}{=} \pi \cdot \int_0^{\infty} e^{-u} du = \pi$$

$$(b) \pi \stackrel{(a)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \underbrace{e^{-y^2}}_{\text{constant in } x} dx dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx}_{\text{constant in } y} dy$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy \right)$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2$$

$$e^{-x^2} > 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

7.3

5

(a) vol (D^2)

$$= \int_{-1}^{+1} \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{+\sqrt{1-u^2}} 1 \, dv \, du$$

$$= \int_{-1}^{+1} 2\sqrt{1-u^2} \, du$$

$$u = \sin(t) \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} 2 \underbrace{\cos(t) \cos(t)}_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t)} \, du$$

$$= \pi$$

(b) $\frac{1}{2}$ vol (D^3)

$$= \int_{-1}^{+1} \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{+\sqrt{1-u^2}} \sqrt{1-u^2-v^2} \, dv \, du$$

$$v = \sqrt{1-u^2} \sin(t) \quad \int_{-1}^{+1} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1-u^2) \cos(t)^2} \cdot \frac{\sqrt{1-u^2} \cos(t) \, dt}{dv} \, du$$

$$= \int_{-1}^{+1} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (1-u^2) \cdot \frac{\cos(t)^2}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t)} \, dt \, du$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_{-1}^{+1} (1-u^2) \, du = \frac{\pi}{2} \left[u - \frac{1}{3}u^3 \right]_{-1}^{+1} = \frac{2}{3}\pi$$

Also

$$\text{vol}(\mathcal{D}^3) = \frac{4}{3} \pi$$

$$(c) \quad \frac{1}{2} \text{vol}(\mathcal{D}^3)$$

$$= \int_{-1}^{+1} \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{+\sqrt{1-u^2}} \sqrt{1-u^2-v^2} \, dv \, du$$

$$\begin{aligned} u &= r \cos(\varphi) \\ v &= r \sin(\varphi) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1-r^2} \cdot \underbrace{r}_{|\det \text{Jacobi}|} \, dr \, d\varphi \end{aligned}$$

$$= 2\pi \int_0^1 \sqrt{1-r^2} \, r \, dr$$

$$\begin{aligned} u &= 1-r^2 \\ &= 2\pi \left(-\frac{1}{2}\right) \int_0^1 \sqrt{1-r^2} \, (-2r) \, dr \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= 1-r^2 \\ &= -\pi \int_1^0 u^{\frac{1}{2}} \, du \end{aligned}$$

$$= \pi \int_0^1 u^{\frac{1}{2}} \, du$$

$$= \pi \left[\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{3} \pi$$

$$\Rightarrow \text{vol}(\mathcal{D}^3) = \frac{2}{3} \pi$$

(d) D^3 parametrisieren via

7

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$z = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$\left(\begin{array}{l} |\det \text{Jacobi}| \\ = r^2 \sin \theta \end{array} \right)$$

mit $r \in [0, 1]$, $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$

$$\text{vol}(D^3) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^1 1 (r^2 \sin \theta) dr d\varphi d\theta$$

$$= \left(\int_0^\pi \sin \theta d\theta \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) \cdot \left(\int_0^1 r^2 dr \right)$$

$$= 2 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{3}$$

$$= \frac{4}{3} \pi$$

(e) D^4 parametrisation via W_a cf. Aufgabe 2.4.

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \cos \varphi \\ z &= r \sin \theta \sin \varphi \cos \psi \\ w &= r \sin \theta \sin \varphi \sin \psi \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{det Jacobian} \\ &= r^3 \sin^2 \theta \sin \varphi \end{aligned}$$

mit $r \in [0, 1]$, $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, \pi]$,
 $\psi \in [0, 2\pi]$

$$\text{vol}(D^4) = \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 \sin^2 \theta \sin \varphi \, dr \, d\psi \, d\varphi \, d\theta$$

$$= \left(\int_0^\pi \sin^2 \theta \, d\theta \right) \left(\int_0^\pi \sin \varphi \, d\varphi \right) \left(\int_0^{2\pi} d\psi \right) \left(\int_0^1 r^3 \, dr \right)$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot 2 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4}$$

$$= \frac{\pi^2}{2}$$

8.1

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^n \xrightarrow{\varphi'} \mathbb{R}^n$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\varphi \circ \varphi}$$

(a) Es ist nach Kettenregel

Matrixmult.

$$D(\varphi \circ \varphi')(x_0) = D\varphi(\varphi'(x_0)) \cdot D\varphi'(x_0)$$

Also ist

$$\det(D(\varphi \circ \varphi')(x_0)) = \det(D\varphi(\varphi'(x_0)) \cdot D\varphi'(x_0))$$

$$= \det(D\varphi(\varphi'(x_0))) \cdot \det(D\varphi'(x_0))$$

(b) Beweis. Sei $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig

Dann: $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) u(x) dx = 0$

für alle $f \in \mathcal{L}^n(\lambda)$

$$\Rightarrow u = 0$$

Bew. Anm. nicht Sei $u(x_0) \neq 0$.

$$\text{O.E. } u(x_0) > 0,$$

$$u \text{ stetig} \Rightarrow \exists \delta > 0 \text{ mit}$$

$$u(x) \in \left(u(x_0) - \frac{1}{2} u(x_0), u(x_0) + \frac{1}{2} u(x_0) \right);$$

$$\text{für } x \in B_\delta(x_0),$$

Also, for each $a := \frac{1}{2} u(x_0)$:

$$\chi_{B_\delta(x_0)} \cdot u \geq a \cdot \chi_{B_\delta(x_0)}$$

So we have:

$$0 = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{B_\delta(x_0)}(x) \cdot u(x) dx$$

$$\geq \int_{\mathbb{R}^n} a \cdot \chi_{B_\delta(x_0)}(x) dx$$

$$= a \cdot \lambda_n(B_\delta(x_0)) > 0$$

h

Then $f \in \mathcal{L}^n(\lambda_1)$ is:

$$(1) \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx \stackrel{\text{Trafo}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(\varphi(x)) \cdot \det(D\varphi(x)) dx$$

$$\stackrel{\text{Trafo}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(\varphi(\varphi(x))) \cdot \det(D\varphi(\varphi(x))) \det(D\varphi(x)) dx$$

$$(2) \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx \stackrel{\text{Trafo}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f((\varphi \circ \varphi)(x)) \det(D(\varphi \circ \varphi)(x)) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(\varphi(\varphi(x))) \det(D(\varphi \circ \varphi)(x)) dx.$$

Nur f durchläuft auch

$f \circ \varphi \circ \gamma$ die Menge $Y^u(\lambda_1)$,

Dank obiger Bem. folgt also

$$\det(D_{\gamma}(\varphi(x))) \det(D_{\varphi}(x)) - \det(D(\gamma \circ \varphi)(x)) = 0$$

für $x \in \mathbb{R}^n$, wobei man noch die Stetigkeit beider Seiten beachtet.

B. z.,

$$\text{Sei } C_1: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}: t \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$$

$$C_1(0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(C_1(t)) = 2 \quad \text{beobachtet}$$

Sei $C_2: [0, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}: t \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1-2t & 1-0t \end{pmatrix}$

$$C_2(0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_2\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es ist $\det(C_2(t)) = 2$ konstant

Sei $C_3: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}: t \mapsto \begin{pmatrix} 2-t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

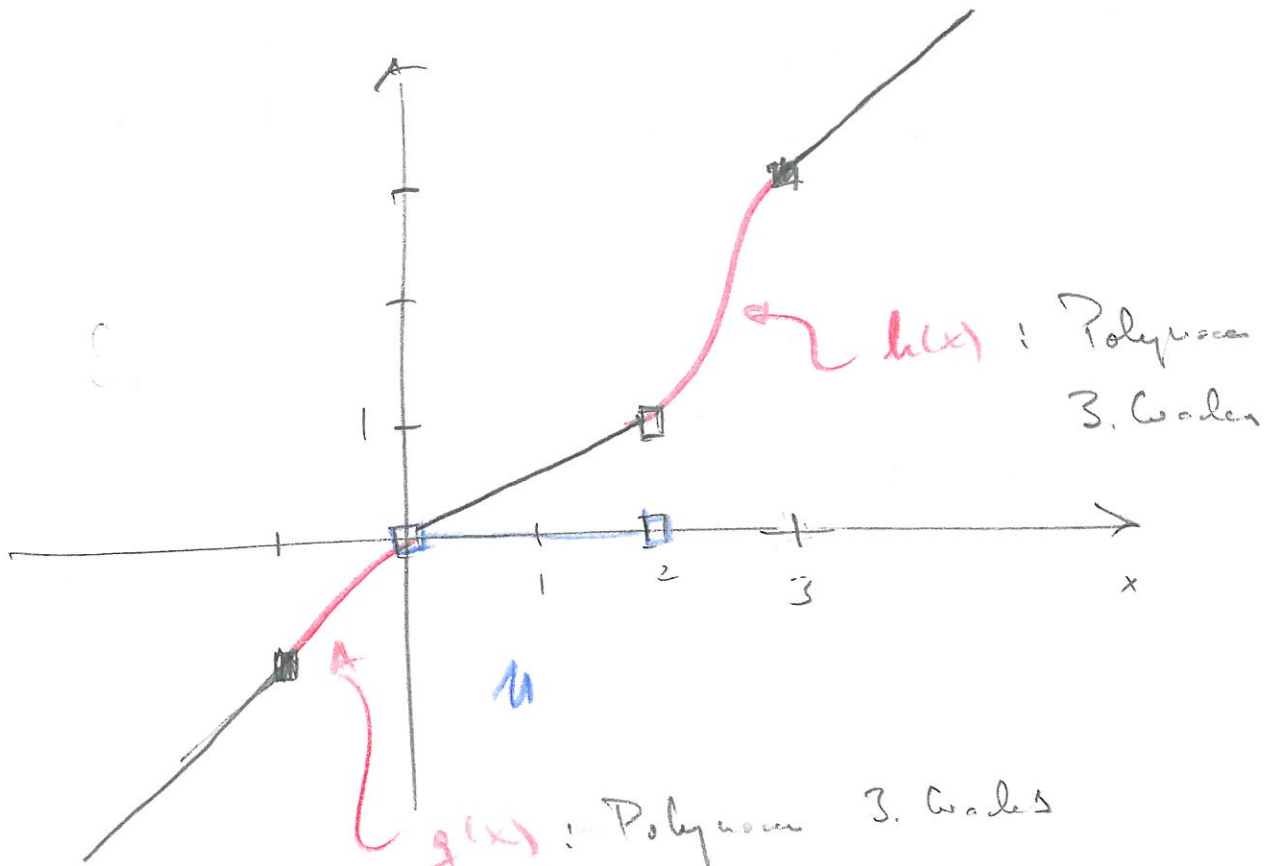
Es ist $\det(C_3(t)) = 2-t$ monoton fallend

Sei

$$C: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}:$$

$$t \mapsto \begin{cases} C_1(3t \cdot \frac{\pi}{2}) & t \in [0, \frac{1}{3}] \\ C_2((3t-1) \cdot \frac{1}{2}) & t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ C_3((3t-2) \cdot 1) & t \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

$$\text{Zi } I = [-1, 3].$$



$$g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$g(-1) = -1, \quad g(0) = 0,$$

$$g'(-1) = 1, \quad g'(0) = \frac{1}{2}$$

$$\text{LGS} \Rightarrow g(x) = -\frac{1}{2}x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x$$

$$g'(x) = -\frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2}$$

$$g''(x) = -3x - 2 < 0 \text{ auf } [-1, 0]$$

$\Rightarrow g'$ ~~dekt~~ ~~monoton~~ ~~fallend~~

$$\text{Also } g'(x) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \quad \text{für } x \in [-1, 0],$$

$$h(x) = \tilde{a}x^3 + \tilde{b}x^2 + \tilde{c}x + \tilde{d}$$

$$h(2) = 1, \quad h(3) = 3$$

$$h'(2) = \frac{1}{2}, \quad h'(3) = 1$$

$$\text{LGS} \Rightarrow h(x) = -\frac{5}{2}x^3 + 19x^2 - \frac{91}{2}x + 36$$

$$h'(x) = -\frac{15}{2}x^2 + 38x - \frac{91}{2}$$

$$h'(2) > 0, \quad h'(3) > 0,$$

Parabel nach unten offen

$$\Rightarrow h'(x) > 0 \quad \text{für } x \in [2, 3]$$

$$\Rightarrow \varphi(x) := \begin{cases} x & \text{für } x \in (-\infty, -1] \\ g(x) & \text{für } x \in [-1, 0] \\ x/2 = q(x) & \text{für } x \in [0, 2] \\ h(x) & \text{für } x \in [2, 3] \\ x & \text{für } x \in [3, +\infty) \end{cases}$$

definiert φ stetig differenzierbar,

$$\varphi|_U = \varphi, \quad \varphi|_{I^c} = \text{id}_{\mathbb{R}}$$

Für $\gamma'(x) > 0$ stets

$\Rightarrow \gamma$ streng monoton wachsend

$\Rightarrow \gamma$ inj

$\Rightarrow \gamma(U) \cap \gamma(U^c) = \emptyset$,

8.4

(a) Skizze

$$\gamma: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto \gamma(t) = (u(t), v(t))$$

Sei $\gamma: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2: (s, t) \mapsto (u(t), v(t))$
 γ : stetig diff'bar.

Dann:
$$D\gamma(s, t) = \begin{pmatrix} 0 & u'(t) \\ 0 & v'(t) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \det(D\gamma(s, t)) = 0$ stets

$\Rightarrow (s, t)$ kritisch für alle $(s, t) \in \mathbb{R}^2$

Satz von Sard $\Rightarrow$

$\gamma(\mathbb{R}^2)$ ist λ_2 -Nullmenge.

(b) Ans. γ surj

$$\Rightarrow \lambda_2(\gamma(\mathbb{R}^2)) = \lambda_2(\mathbb{R}^2) = +\infty \neq 0$$

$\hookrightarrow$ zu (a).

[2.1.1] "Proced."

9.1 Es ist $\overset{y_2 \wedge y_3}{\underset{''}{y_1}}, \overset{y_3 \wedge y_1}{\underset{''}{y_2}}, \overset{y_1 \wedge y_2}{\underset{''}{y_3}}$ eine Basis

von $\Lambda^2 V$. Es ist für

$$\omega = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 \in \Lambda^2 V$$

wobei $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ beliebig

$$\omega(v_2, v_3) = \alpha_1$$

$$\omega(v_3, v_1) = \alpha_2$$

$$\omega(v_1, v_2) = \alpha_3$$

Wir erhalten

$$(f^* \omega)(v_2, v_3)$$

$$= \omega(f v_2, f v_3)$$

$$= \omega(a_{1,2} v_1 + a_{2,2} v_2 + a_{3,2} v_3, a_{1,3} v_1 + a_{2,3} v_2 + a_{3,3} v_3)$$

$$= a_{2,2} a_{3,3} - a_{3,2} a_{2,3}$$

$$(f^* \varphi_1) (v_3, v_1)$$

$$= \varphi_1 (a_{1,3} v_1 + a_{2,3} v_2 + a_{3,3} v_3, a_{1,1} v_1 + a_{2,1} v_2 + a_{3,1} v_3)$$

$$= a_{2,3} a_{3,1} - a_{3,3} a_{2,1}$$

Etc. Die gesuchte Matrix wird

	φ_1	φ_2	φ_3
φ_1	$a_{2,2} a_{3,3} - a_{3,2} a_{2,3}$	$a_{3,2} a_{1,3} - a_{1,3} a_{3,2}$	$a_{1,2} a_{2,3} - a_{2,3} a_{1,2}$
φ_2	$a_{2,3} a_{3,1} - a_{3,3} a_{2,1}$	$a_{3,3} a_{1,1} - a_{1,1} a_{3,3}$	$a_{1,3} a_{2,1} - a_{2,1} a_{1,3}$
φ_3	$a_{2,1} a_{3,2} - a_{3,2} a_{2,1}$	$a_{2,1} a_{1,2} - a_{1,2} a_{2,1}$	$a_{1,1} a_{2,2} - a_{2,2} a_{1,1}$

9,2

$$\begin{aligned}
 (a) \quad \kappa(\omega, \tilde{\omega}) &= \omega \wedge \tilde{\omega} \\
 &= (-1)^{2 \cdot 2} \tilde{\omega} \wedge \omega \\
 &= \kappa(\tilde{\omega}, \omega)
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \kappa$ symmetrisch

(b) Verwenden Basis

$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2, \varphi_1 \wedge \varphi_3, \varphi_1 \wedge \varphi_4, \varphi_2 \wedge \varphi_3, \varphi_2 \wedge \varphi_4, \varphi_3 \wedge \varphi_4)$$

von $\wedge^2 V$,

Es wird e.g.

$$\begin{aligned}
 \kappa(\varphi_1 \wedge \varphi_2, \varphi_1 \wedge \varphi_2) &= \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_1 \wedge \varphi_2 \\
 &= - \underbrace{\varphi_1 \wedge \varphi_1}_0 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_2 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\kappa(\varphi_1 \wedge \varphi_2, \varphi_3 \wedge \varphi_4) = \underline{1} \cdot \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge \varphi_4$$

$$\kappa(\varphi_1 \wedge \varphi_3, \varphi_2 \wedge \varphi_4) = \varphi_1 \wedge \varphi_3 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_4$$

$$= \underline{-1} \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge \varphi_4$$

Die Grammatrix wird

	$\varphi_1 \wedge \varphi_2$	$\varphi_1 \wedge \varphi_3$	$\varphi_1 \wedge \varphi_4$	$\varphi_2 \wedge \varphi_3$	$\varphi_2 \wedge \varphi_4$	$\varphi_3 \wedge \varphi_4$
$\varphi_1 \wedge \varphi_2$	0	0	0	0	0	1
$\varphi_1 \wedge \varphi_3$	0	0	0	0	-1	0
$\varphi_1 \wedge \varphi_4$	0	0	0	1	0	0
$\varphi_2 \wedge \varphi_3$	0	0	1	0	0	0
$\varphi_2 \wedge \varphi_4$	0	-1	0	0	0	0
$\varphi_3 \wedge \varphi_4$	1	0	0	0	0	0

$$= : G$$

(c) G regulär $\Leftrightarrow \kappa$ nichtausgewertet

G hat auf Diagonalen nicht null
positive Einträge $\Rightarrow \kappa$ nicht positiv definit.

9.3.

$$\omega = \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} dx_1 - \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} dx_2$$

$$\in \Omega^1(U)$$

$$(a) \quad 0 \stackrel{!}{=} d\omega$$

$$= d \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} \wedge dx_1 - d \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \wedge dx_2$$

$$= \left(\underbrace{\partial_1 \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} dx_1}_{\text{bracket: } dx_1 \wedge dx_1 = 0} + \underbrace{\partial_2 \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} dx_2}_{\frac{x_1^2 - x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}} \right) \wedge dx_1$$

$$- \left(\underbrace{\partial_1 \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} dx_1}_{\frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}} + \underbrace{\partial_2 \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} dx_2}_{\text{bracket: } dx_2 \wedge dx_2 = 0} \right) \wedge dx_2$$

$$= \frac{x_1^2 - x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} dx_2 \wedge dx_1 - \frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \underbrace{dx_1 \wedge dx_2}_{= -dx_2 \wedge dx_1}$$

$$= 0$$

(b) Annahme, es gibt

$$\text{ein } \gamma \in \Omega^0(U)$$

$$\text{mit } d\gamma = \omega.$$

$$\text{Also: } \gamma: U \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit}$$

$$\partial_1 \gamma(x_1, x_2) dx_1 + \partial_2 \gamma(x_1, x_2) dx_2$$

$$= \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} dx_1 - \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} dx_2$$

$$\text{Also } \partial_1 \gamma(x_1, x_2) = \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}$$

$$\partial_2 \gamma(x_1, x_2) = -\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2},$$

für $x_1 \neq 0$ wird

$$\begin{aligned} & \int -\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} dx_2 \\ &= \int -\frac{x_1^{-1}}{1 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2} dx_2 \stackrel{u = \frac{x_2}{x_1}}{=} \int -\frac{1}{1 + u^2} du \end{aligned}$$

$$= -\arctan(\underbrace{u}_{x_2/x_1}) + \text{const.} \quad \begin{matrix} \nearrow \text{in } x_2 \text{ constant} \\ 6 \end{matrix}$$

$$\text{Also } \eta(x_1, x_2) = -\arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right) + C(x_1).$$

$$\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} = \partial_1 \eta(x_1, x_2)$$

$$= -\frac{1}{1 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2} \cdot \left(-\frac{x_2}{x_1^2}\right) + C'(x_1)$$

$$= \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} + C'(x_1)$$

$$\Rightarrow C(x_1) = \begin{cases} C_1 & \text{für } x_1 > 0 \\ C_2 & \text{für } x_1 < 0 \end{cases}$$

Für $t \in \mathbb{R}$ with $\cos(t) \neq 0$ wird

$$\eta(\cos(t), \sin(t))$$

$$= -\arctan\left(\frac{\sin(t)}{\cos(t)}\right) + \begin{cases} C_1 & \text{f. } \cos(t) > 0 \\ C_2 & \text{f. } \cos(t) < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \eta(\cos(t), \sin(t)) = -\arctan(\tan(t)) + C_1$$

"
 $-t + C_1$

" η shifig

$$\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \eta(\cos(t), \sin(t)) = -\arctan(\tan(t)) + C_2$$

"
 $-(t - \pi) + C_2$

$$\Rightarrow C_1 = \pi + C_2$$

$$\lim_{t \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \eta(\cos(t), \sin(t)) = -\arctan(\tan(t)) + C_2$$

"
 $-(t + \pi) + C_2$

" η shifig

$$\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \eta(\cos(t), \sin(t)) = -\arctan(\tan(t)) + C_1$$

"
 $-t + C_1$

$$\Rightarrow -\pi + C_2 = C_1$$

$$\Rightarrow 2\pi = 0$$

↯

9.4

In $\mathbb{R}^2$ sei (dx_1, dx_2) dual zu (e_1, e_2)

In $\mathbb{R}$ sei (dt) dual zu (e_1)

[Allg.

$$(f^*\omega)(p)(v_1, \dots, v_k) = \omega(f(p))(\mathcal{D}f v_1, \dots, \mathcal{D}f v_k)$$

Bei uns:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto \left(\underbrace{\cos(t)}_{=: c_t}, \underbrace{\sin(t)}_{=: s_t} \right) = c_t e_1 + s_t e_2$$

$$\omega = u(x_1, x_2) dx_1 + v(x_1, x_2) dx_2$$

$$\in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$$

$$(f^*\omega)(t) = \alpha_t dt \quad \text{für ein } \alpha_t \in \mathbb{R}$$

Es wird

$$\alpha_t = (f^*\omega)(t)(e_1)$$

NR :

9

$$(\mathcal{D}f) e_1 = -s_t e_1 + c_t e_2$$

Also :

$$\alpha_t = (f^* \omega)(t)(e_1) = \omega(f(t))(\mathcal{D}f|e_1)$$

$$= (u(c_t, s_t) dx_1 + v(c_t, s_t) dx_2)(-s_t e_1 + c_t e_2)$$

$$\Rightarrow -s_t u(c_t, s_t) + c_t v(c_t, s_t)$$

$$\Rightarrow (f^* \omega)(t) = \left(-s_t u(c_t, s_t) + c_t v(c_t, s_t) \right) dt$$

10.1

$$(a) \text{ Alg. : } (c^* \omega)(p) (v_1, \dots, v_k)$$

$$\stackrel{\text{Def.}}{=} \omega(c(p)) (Dc(p)(v_1), \dots, Dc(p)(v_k))$$

$$\text{für } p = (t_1, \dots, t_m) \in U$$

$$(c^* \omega)(p) \text{ als Funkt. von}$$

Toren $dt_{j_1}, \dots, dt_{j_k}$ schreiben, mit
 $1 \leq j_1 < \dots < j_k = m$. Koef. bei diesem Term:

$$(c^* \omega)(p) (e_{j_1}, \dots, e_{j_k})$$

$$= \omega(c(p)) (Dc(p) e_{j_1}, \dots, Dc(p) e_{j_k})$$

$$(Dc)(p) = (d_j c_i(p))_{i,j}$$

Def ω

$$= f(c(p)) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \left(\sum_{s_1=1}^n \gamma_{j_1} c_{s_1}(p) e_{s_1}, \dots, \sum_{s_k=1}^n \gamma_{j_k} c_{s_k}(p) e_{s_k} \right)$$

$$= f(c(p)) \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma) d_{j_1} c_{i_{\sigma(1)}}(p) \cdot \dots \cdot d_{j_k} c_{i_{\sigma(k)}}(p)$$

↑
symmetrische Gruppe

Zusammen also:

$$(c^* \omega)(p)$$

$$= \underbrace{f(c(p))}_{=(c_1(p), \dots, c_n(p))} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma) \partial_{j_1} c_{\sigma(1)}(p) \dots \partial_{j_k} c_{\sigma(k)}(p) \cdot dt_{j_1} \wedge \dots \wedge dt_{j_k}$$

$$(b) \quad \omega(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2, x_3) dx_2 \in \Omega^1(V)$$

$$t := t_1$$

$$c^*(\omega)(t) = f(c_1(t), c_2(t), c_3(t)) \cdot \underbrace{\partial_1}_{\frac{d}{dt}} c_2(t) dt$$

$$(c) \quad \omega(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2, x_3) dx_2 \in \Omega^1(V)$$

$$c^*(\omega)(t_1, t_2) = f(c_1(t_1, t_2), c_2(t_1, t_2), c_3(t_1, t_2)) \cdot \left(\partial_1 c_2(t_1, t_2) dt_1 + \partial_2 c_2(t_1, t_2) dt_2 \right)$$

$$(d) \quad \omega(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2, x_3) dx_1 \wedge dx_3$$

$$(c^* \omega)(t_1, t_2) = f(c_1(t_1, t_2), c_2(t_1, t_2), c_3(t_1, t_2))$$

$$1 \leq j_1 < j_2 \leq 2 \longrightarrow \left(\partial_1 c_1(t_1, t_2) \cdot \partial_2 c_3(t_1, t_2) - \partial_1 c_3(t_1, t_2) \cdot \partial_2 c_1(t_1, t_2) \right) \cdot dt_1 \wedge dt_2$$

10.2

Def.

$$\partial c = \sum_{i=1}^n (-1)^i (c_{i,0} - c_{i,1})$$

Summe
Summe

$$n=1: \partial c = c_{1,1} - c_{1,0}$$

an Position i
die 1 einsetzen
an Position i
die 0 einsetzen

Seien nun: ∂c

$$\omega(x_1, x_2) = x_1 x_2 + x_1, \quad c(t) = (\cos(\pi t), \sin(\pi t))$$

$$\bullet \int_c d\omega = \int_{I'} c^* d(x_1 x_2 + x_1)$$

$$I: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto t$$

$$= \int_{I'} c^* \left(\underbrace{\partial(x_1 x_2 + x_1)}_{x_2 + 1} dx_1 + \underbrace{\partial(x_1 x_2 + x_1)}_{x_1} dx_2 \right)$$

Einschreiben:
 $x_1 = \cos(\pi t), x_2 = \sin(\pi t)$

$$\stackrel{\text{cf 10.1.6}}{=} \int_{t=0}^1 (\sin(\pi t) + 1) \frac{d}{dt} \cos(\pi t) dt + \int_{t=0}^1 \cos(\pi t) \cdot \frac{d}{dt} \sin(\pi t) dt$$

$$= \left(-2 - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{\pi}{2} = -2$$

$$\begin{aligned}
\bullet \int_{\partial c} \omega &= \int_{c_{11}} \omega - \int_{c_{10}} \omega \\
&= \int_{\substack{I^0 \\ (1) \mapsto \omega(c(1))}} \underbrace{c_{11}^* \omega}_{(1) \mapsto \omega(c(1))} - \int_{\substack{I^0 \\ (1) \mapsto \omega(c(0))}} \underbrace{c_{10}^* \omega}_{(1) \mapsto \omega(c(0))} \\
&= \omega(c(1)) - \omega(c(0)) \\
&= \omega(-1, 0) - \omega(1, 0) \\
&= -1 - 1 = -2
\end{aligned}$$

10.3

$$\begin{aligned}
\omega &= x_2 dx_1, \\
c(t_1, t_2) &= (\cos(\pi t_1), \sin(\pi t_1) t_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \int_c d\omega &= \int_c \left(\underbrace{\partial_1 x_2}_{=0} \underbrace{dx_1 \wedge dx_1}_0 + \underbrace{\partial_2 x_2}_1 \underbrace{dx_2 \wedge dx_1}_{= -dx_1 \wedge dx_2} \right) \\
&= \int_c (-1) dx_1 \wedge dx_2 \\
&= \int_{I^2} c^* \left((-1) dx_1 \wedge dx_2 \right)
\end{aligned}$$

(cf 10.1(d))

$$= \int_{I^2} (-1) \left(\underbrace{\partial_1 c_1(t_1, t_2)}_{-\pi \sin(\pi t_1)} \cdot \underbrace{\partial_2 c_2(t_1, t_2)}_{\sin(\pi t_1)} - \underbrace{\partial_1 c_2(t_1, t_2)}_0 \cdot \underbrace{\partial_2 c_1(t_1, t_2)}_0 \right) dt_1 \wedge dt_2$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 (-1) \cdot (-\pi \sin(\pi t_1)^2) dt_1 dt_2$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

forwards summe

$$\partial c = -(\underbrace{c_{1,0}}_{t_2 \mapsto (1,0)} - \underbrace{c_{1,1}}_{t_2 \mapsto (-1,0)}) + (\underbrace{c_{2,0}}_{t_1 \mapsto (\cos(\pi t_1), 0)} - \underbrace{c_{2,1}}_{t_1 \mapsto (\cos(\pi t_1), \sin(\pi t_1))})$$

$$\int_{\partial c} \omega = - \int_{c_{1,0}} \omega + \int_{c_{1,1}} \omega + \int_{c_{2,0}} \omega - \int_{c_{2,1}} \omega$$

$$\text{Ans: } (u^* \omega)(t) = \left(u^* (x_2 dx_1) \right) (t)$$

$$= u_2(t) \cdot \frac{d}{dt} u_1(t) \cdot dt,$$

$$\text{also falls } \left. \begin{array}{l} u_1 \text{ konst.} \\ \text{oder } u_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow u^* \omega = 0$$

$$\Rightarrow \int_{c_{1,0}} \omega = \int_I c_{1,0}^* \omega = 0$$

$$\text{und } \int_{c_{1,1}} \omega = \int_I c_{1,1}^* \omega = 0$$

$$\text{und } \int_{c_{2,0}} \omega = \int_I c_{2,0}^* \omega = 0$$

Search

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial C} \omega &= - \int_{C_2} \omega = - \int_{I_1} c_2^* \omega \\
 &= - \int_{t_1=0}^1 \sin(\pi t_1) \cdot \frac{d}{dt_1} \cos(\pi t_1) \\
 &= - \frac{n}{2}
 \end{aligned}$$

10.4

$$\begin{aligned}
 \omega(x_1, x_2) &= \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} dx_1 - \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} dx_2, \\
 c(t) &= (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_C \omega &= \int_{I_1} c^* \omega \\
 &= \int_{I_1} \frac{\sin(2\pi t)}{\underbrace{\sin^2(2\pi t) + \cos^2(2\pi t)}_1} \cdot \frac{d}{dt} \cos(2\pi t) \\
 &\quad + \int_{I_1} \left(- \frac{\cos(2\pi t)}{\underbrace{\sin^2(2\pi t) + \cos^2(2\pi t)}_1} \right) \cdot \frac{d}{dt} \sin(2\pi t) \\
 &= -2\pi
 \end{aligned}$$

Kannalanne $\omega = d\eta$

für ein $\eta \in \Omega^0(U)$.

Dann

$$\int_C \omega = \int_C dy$$

$$= \int_a^b y$$

$$= \int_{c_1} y - \int_{c_0} y$$

$$= \int_{I^0} \underbrace{c_{1,1}^* y}_{() \mapsto y(c(1))} - \int_{I^0} \underbrace{c_{1,0}^* y}_{() \mapsto y(c(0))}$$

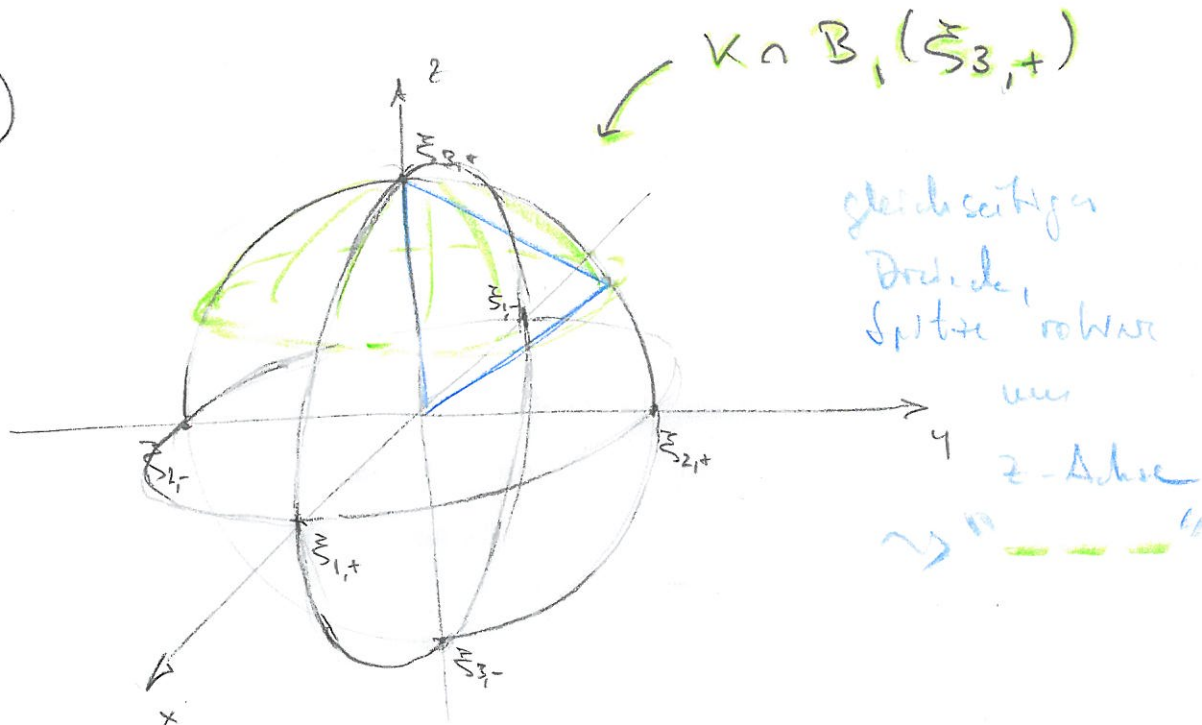
$$= y(c(1)) - y(c(0))$$

$$= y(1, 0) - y(1, 0)$$

$$= 0 \neq -2\pi$$

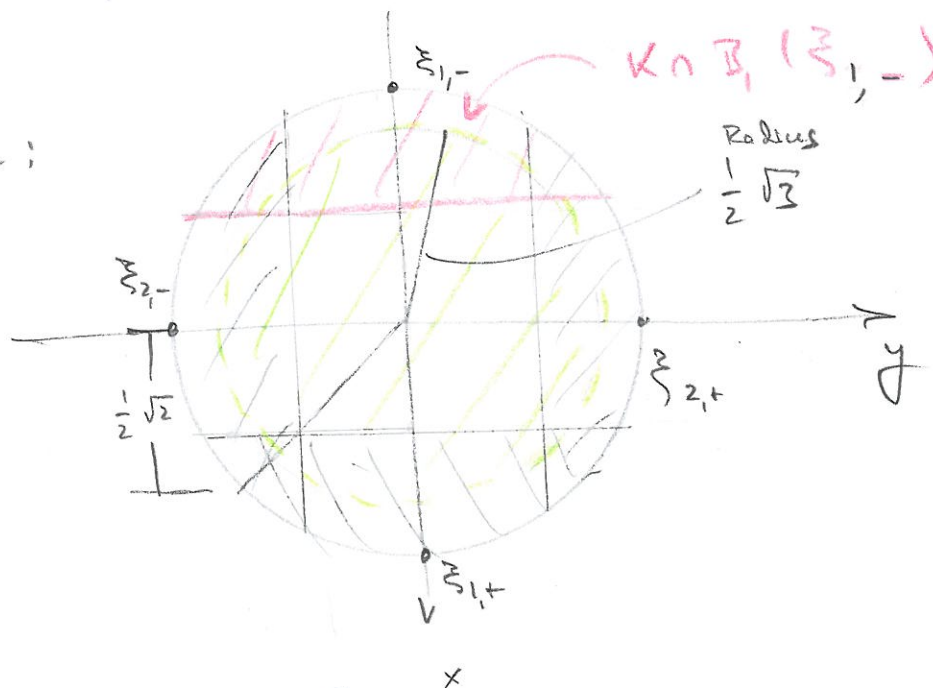
Also ist ω nicht exakt

11.1



(a)

Draufsicht:



Es gibt keinen Punkt in K , der
nicht in besagter Vereinigung liegt,

- da
- $\frac{1}{2} < \frac{1}{2} \sqrt{2}$ (Überlappung in Ecken)
 - $\frac{1}{2} \sqrt{2} < \frac{1}{2} \sqrt{3}$ (Quadrat im Kreis)

(b) OE betrachten wir $\varphi_{3,+}$. Schreibe $\rho := \frac{1}{2}\sqrt{3}$. 2

$$\begin{aligned} \text{Sei } \varphi_{3,+} : B_1(\xi_{3,+}) \cap U &\longrightarrow B_\rho(0) \\ (x, y, z) &\longmapsto (x, y) \end{aligned}$$

Da $z > \frac{1}{2}$, ist dies wohldefiniert.

$$\begin{aligned} \text{Sei } \varphi_{3,+} : B_\rho(0) &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\longmapsto (x, y, \sqrt{1-x^2-y^2}) \end{aligned}$$

Es ist das Bild von $\varphi_{3,+}$ gleich $B_1(\xi_{3,+}) \cap U$.

Es invertieren sich $\varphi_{3,+}$ und $\varphi_{3,+}^{-1}$ gegenseitig.

Um zu zeigen, daß $\varphi_{3,+}$ eine Karte ist, bleibt nur zu zeigen, daß

$(D\varphi_{3,+})(x, y)$ stets Rang 2 hat; cf. S. 3

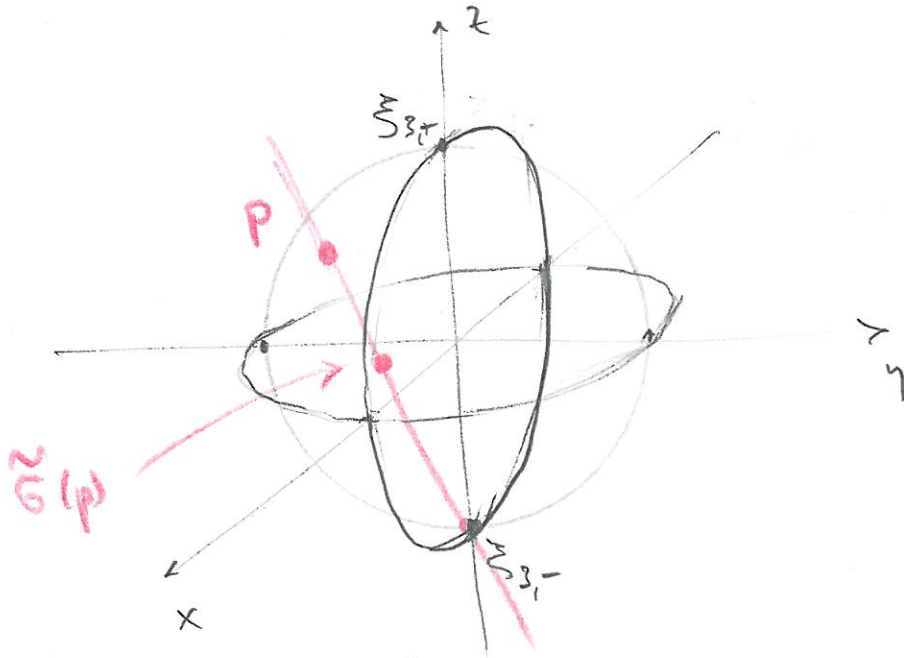
Satz 23.4. Aber

$$(D\varphi_{3,+})(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} & -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{pmatrix}$$

Analog $\varphi_{1,+}$, $\varphi_{1,-}$, $\varphi_{2,+}$, $\varphi_{2,-}$, $\varphi_{3,-}$.

Die Vereinigung der Bilder der Karten ist
gleich K dank (A),

(c)



DE konstruieren wir $\tilde{G}$.

Gerade durch $P = (x, y, z)$ und $(0, 0, -1)$:

$$\{(tx, ty, tz + (1-t)(-1)) : t \in \mathbb{R}\}$$

Schneidet mit $x=y=0$ Ebene: $t = \frac{1}{z+1}$

$$\Rightarrow \tilde{G}(x, y, z) = \left(\frac{x}{z+1}, \frac{y}{z+1} \right)$$

4

Gerade durch $p = (u, v, 0)$ und $(0, 0, -1)$:

$$\{(tu, tv, (1-t)(-1)) : t \in \mathbb{R}\}$$

Schnitt mit $K \setminus \{\xi_{3-}\}$:

$$(tu)^2 + (tv)^2 + ((1-t)(-1))^2 = 1 \quad \text{und} \quad t \neq 0$$

$$\Rightarrow t^2(u^2 + v^2 + 1) - 2t + 1 = 1$$

$$\Rightarrow t = \frac{2}{1+u^2+v^2}$$

$$\Rightarrow \sigma(u, v) = \left(\frac{2u}{1+u^2+v^2}, \frac{2v}{1+u^2+v^2}, \frac{1-u^2-v^2}{1+u^2+v^2} \right)$$

Also:

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\sigma|_{\mathbb{R}^2}} & \\ \mathbb{R}^2 & & K \setminus \{\xi_{3-}\} \\ & \xleftarrow{\sigma} & \end{array}$$

heben sich gegenseitig auf

Jetzt hat

$$(D\sigma)(u, v) = \frac{1}{(u^2+v^2+1)^2} \begin{pmatrix} 2(v^2-u^2+1) & -4uv \\ -4uv & 2(u^2-v^2+1) \\ -4u & -4v \end{pmatrix}$$

Rang 2:

Falls $u^2 + v^2 \neq 1$, dann

$$\det \begin{pmatrix} 2(v^2 - u^2 - 1) & -4uv \\ -4uv & 2(u^2 - v^2 - 1) \end{pmatrix} = -4(u^2 + v^2)^2 + 4 \neq 0$$

Falls $u^2 + v^2 = 1$, dann

$$(\mathcal{I}_5)(u, v) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4v^2 & -4uv \\ -4uv & 4u^2 \\ -4u & -4v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^2 & -uv \\ -uv & u^2 \\ -u & -v \end{pmatrix}$$

$$\text{und } \det \begin{pmatrix} -uv & u^2 \\ -u & -v \end{pmatrix} = u(v^2 + u^2) = u$$

$$\text{und } \det \begin{pmatrix} v^2 & -uv \\ -u & -v \end{pmatrix} = -v(v^2 + u^2) = -v,$$

also wieder beide gleich 0.

$$(d) \quad p = \varphi_{3,+}(x, y)$$

$$(\mathcal{D}\varphi_{3,+})(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} & -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T_p K = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{pmatrix} \right] =: V_1$$

$$(e) p = \sigma(u, v)$$

$$(\sigma)(u, v) = \frac{2}{u^2+v^2+1} \begin{pmatrix} v^2-u^2+1 & -2uv \\ -2uv & u^2-v^2+1 \\ -2u & -2v \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T_p K = \left[\begin{pmatrix} v^2-u^2+1 \\ -2uv \\ -2u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2uv \\ u^2-v^2+1 \\ -2v \end{pmatrix} \right] =: V_2$$

$$(f) \text{ Theorem: } V_1 = V_2$$

Dies wollen wir verifizieren.

$$\text{Da } V_1 = 2 = \text{dim } V_2 \Rightarrow g^{22} V_2 \stackrel{!}{=} V_1$$

$$(1) \begin{pmatrix} v^2-u^2+1 \\ -2uv \\ -2u \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} (v^2-u^2+1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{pmatrix} - 2uv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{pmatrix},$$

was unter Beachtung von $x = \frac{2u}{1+u^2+v^2}$,

$y = \frac{2v}{1+u^2+v^2}$ verifiziert werden kann:

$$(2) \begin{pmatrix} -2uv \\ u^2 - v^2 + 1 \\ -2v \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} -2uv \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{pmatrix} + (u^2 - v^2 + 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{pmatrix}$$

wie genauso verifiziert werden kann.

11.2

Bezeichnungen aus 11.1 beibehalten.
 $\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$

11.2

(a) Wellen verwenden:

$$(\varphi_{3,+} \text{ verschoben}) = \tilde{\varphi}_{3,+}$$

$$\varphi_{2,+}, \varphi_{2,-}$$

$$\varphi_{1,+}, \varphi_{1,-}$$

$$\begin{array}{c} \tilde{\varphi}_{3,+} : B_p(1) \xrightarrow{\quad} B_p(0) \xrightarrow{\varphi_{3,+}} \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \longmapsto (x, y, -1) \longmapsto \varphi_{3,+}(x, y, -1) \end{array}$$

$$\tilde{\varphi}_{3,+} \text{ schränkt sich zu } \tilde{\varphi}_{3,+} \Big|_{\underbrace{B_p(1) \cap \mathbb{H}_2}_{z \geq 0}} = \tilde{\varphi}_{3,+} \Big|_{B_p(1) \cap \Pi}$$

Die weiteren Bedingungen an $\tilde{\varphi}_{3,+}$ folgen aus der Eigenschaft von $\varphi_{3,+}$.

Dann: $\varphi_{2,+} : B_p(0) \longrightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x, z) \longmapsto (x, +\sqrt{1-x^2-z^2}, z)$

Schränkt da für $\varphi_{2,+} \Big|_{\substack{B_1(\xi_{2,+}) \cap \overline{\Pi} \\ B_p(0) \cap \underbrace{\mathbb{H}^2}_{z \geq 0}}}$.

Die sonstigen Bedingungen an $\varphi_{2,+}$ wurde
 in 11.1 überprüft.

Genauso $\varphi_{2,-}, \varphi_{1,+}, \varphi_{1,-}$.

Die Vereinigung der Bilder dieser
 Karten ist $\overline{\Pi}$.

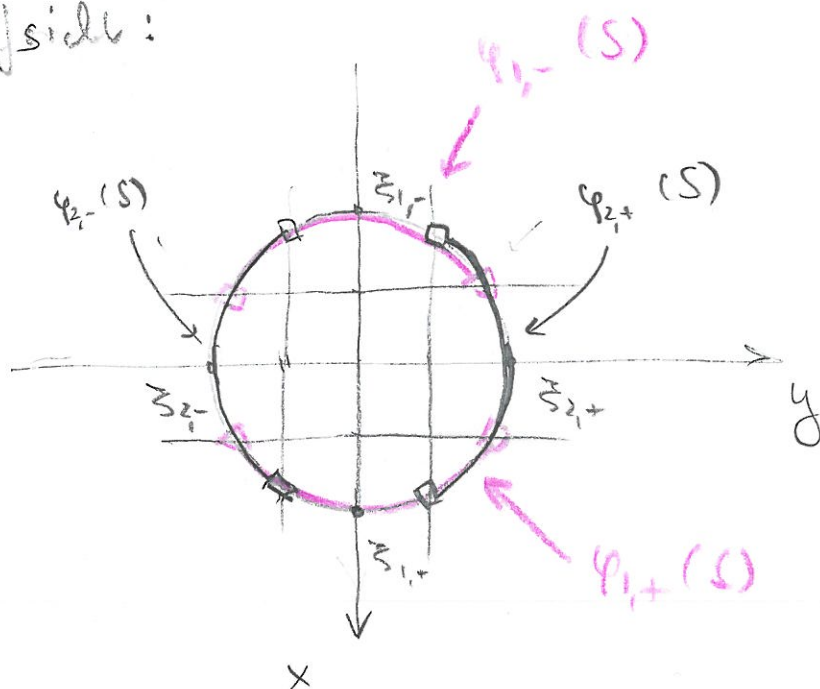
(b) Sei $S := B_p(1) \cap (\mathbb{R} \times \{0\})$
 ("Strecke").

Es ist $\partial \Pi \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_{2,+}(S) \cup \varphi_{2,-}(S)$
 $\cup \varphi_{1,+}(S) \cup \varphi_{1,-}(S)$

Beachte, daß der Definitionsbereich

von $\tilde{\varphi}_{3,+}$ zu $\mathbb{R} \times \{0\}$ desfermiert ist.

Draufsicht:



(c) Also $\partial \Pi = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$

(c) Sei $0, \xi$. $p \in \varphi_{2,+}(S)$.

Also $p = (x, \sqrt{1-x^2}, 0)$ mit

$x \in (-p, +p)$.

$$\left(\mathcal{D}(\varphi_{2,+}|_S) \right)(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(\mathcal{D}\varphi_{2,+})(x, \sqrt{1-x^2}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

NR: $\varphi_{2,+}(x, z) = (x, \sqrt{1-x^2-z^2}, z)$

$$(\mathcal{D}\varphi_{2,+})(x, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} & -\frac{z}{\sqrt{1-x^2}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T_p(\partial\pi) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$T_p(\pi) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

(d) Sei $0 \neq p \in \varphi_{2,+}(S)$,

Also $p = (x, \sqrt{1-x^2}, 0)$ mit $x \in (-p, p)$,

Es soll $u(p) \in T_p(\pi)$

senkrecht auf $T_p(\partial\pi)$ stehen

und umgekehrt sein.

$$\text{Also } n(p) = \pm \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad 11$$

Dann soll noch

$$\left(\varphi_{2,+}^* (n(p)) \right)_2 < 0 \text{ sein.}$$

↑
2te Forderung

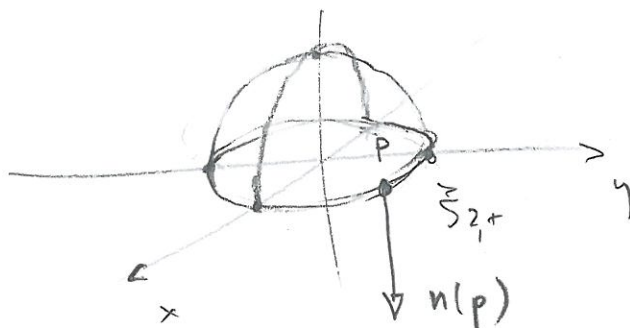
Schreiben wir $\varphi_{2,+}^* (n(p)) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix},$

dann ist $\left((D\varphi_{2,+})(x, \sqrt{1-x^2}) \right) \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

$$= n(p) = \pm \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

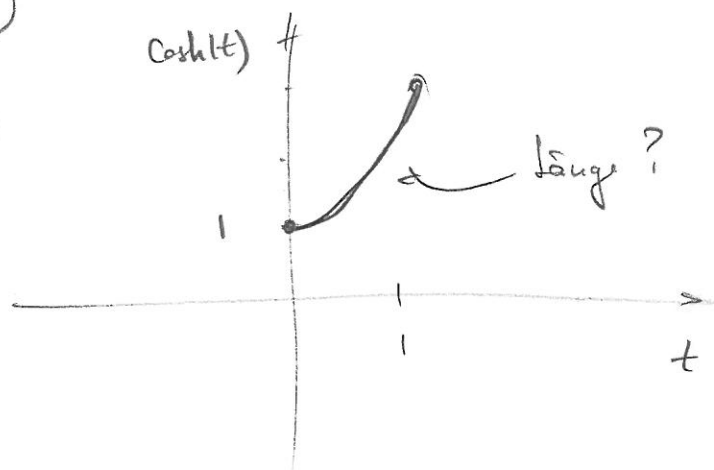
Also, cf. (c), $\alpha = 0$ und $\beta = \pm 1$

Daraus folgt $\beta = -1$ und $n(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$



(2.1)

(a)



Parametrisierung

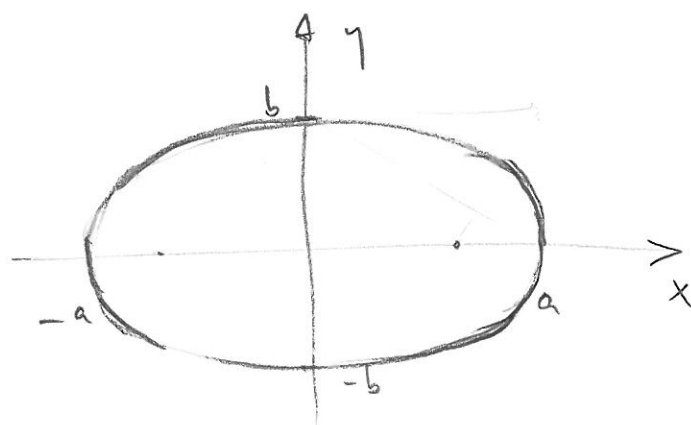
$$\phi(t) = \begin{pmatrix} t \\ \cosh(t) \end{pmatrix}$$

$$\phi'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sinh(t) \end{pmatrix},$$

wobei $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \text{Länge: } & \int_0^1 \|\phi'(t)\| dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{1 + \sinh(t)^2} dt \\ &= \int_0^1 \cosh(t) dt \\ &= \sinh(1) \end{aligned}$$

(b)



Parametrisierung:

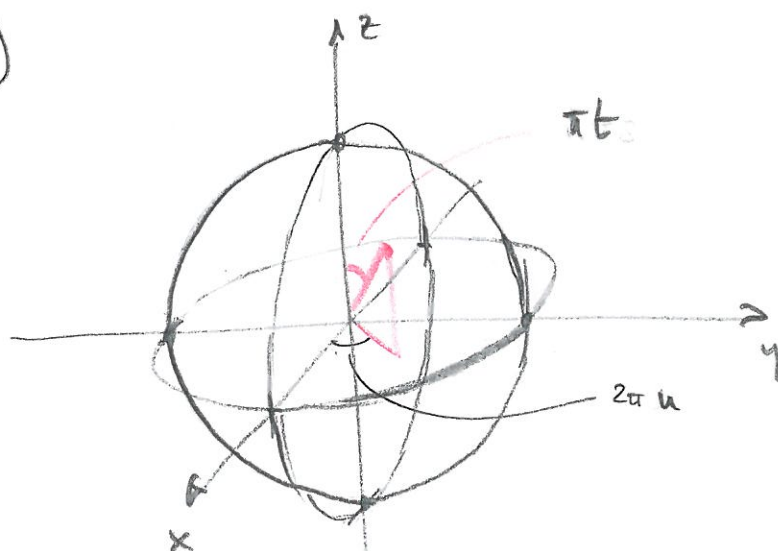
$$\phi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2; \quad t \mapsto \begin{pmatrix} a \cos(2\pi t) \\ b \sin(2\pi t) \end{pmatrix}$$

$$\phi'(t) = \begin{pmatrix} -2\pi a \sin(2\pi t) \\ 2\pi b \cos(2\pi t) \end{pmatrix}$$

Länge: $\int_0^1 \sqrt{(-2a \sin(2\pi t))^2 + (2\pi b \cos(2\pi t))^2} dt$

$$= 2\pi \int_0^1 \sqrt{a^2 \sin(2\pi t)^2 + b^2 \cos(2\pi t)^2} dt$$

12.2



Parametrisierung

$$\varphi(s, t) := \begin{pmatrix} \sin(\pi t) \cos(2\pi u) \\ \sin(\pi t) \sin(2\pi u) \\ \cos(\pi t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{\pi t} c_{2\pi u} \\ s_{\pi t} s_{2\pi u} \\ c_{\pi t} \end{pmatrix},$$

wobei $s, t \in [0, 1]$.

(Kurz: $s_a := \sin(a)$, $c_a := \cos(a)$)

Oberfläche:

$$\int_{[0,1]^2} \|\varphi_t \times \varphi_u\| dx = \int_{[0,1]^2} \left\| \begin{pmatrix} \pi c_{\pi t} c_{2\pi u} \\ \pi c_{\pi t} s_{2\pi u} \\ -\pi s_{\pi t} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} s_{\pi t} (-2\pi s_{2\pi u}) \\ s_{\pi t} (2\pi c_{2\pi u}) \\ 0 \end{pmatrix} \right\| dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{[0,1]^2} 2\pi^2 s_{\pi t} \left\| \begin{pmatrix} c_{\pi t} c_{2\pi u} \\ c_{\pi t} s_{2\pi u} \\ -s_{\pi t} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -s_{2\pi u} \\ c_{2\pi u} \\ 0 \end{pmatrix} \right\| d\lambda \\
&= \int_{[0,1]^2} 2\pi^2 s_{\pi t} \left\| \begin{pmatrix} s_{\pi t} c_{2\pi u} \\ -s_{\pi t} s_{2\pi u} \\ \underbrace{c_{\pi t} c_{2\pi u}^2 + c_{\pi t} s_{2\pi u}^2}_{c_{\pi t}} \end{pmatrix} \right\| d\lambda \\
&= \int_{[0,1]^2} 2\pi^2 s_{\pi t} \sqrt{\underbrace{(s_{\pi t} c_{2\pi u})^2 + (-s_{\pi t} s_{2\pi u})^2}_{s_{\pi t}^2} + c_{\pi t}^2} d\lambda \\
&= \int_0^1 \int_0^1 2\pi^2 s_{\pi t} d\lambda dt \\
&= \int_0^1 2\pi^2 s_{\pi t} dt \\
&= \left[2\pi^2 \left(\frac{1}{\pi} c_{\pi t} \right) \right]_0^1 = 4\pi
\end{aligned}$$

12.3

$$(a) \quad f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Delta f(x_1, x_2, x_3) = 2 + 2 + 2 = 6$$

$$\int_{\Omega} \Delta f \, dV = \int_{\Omega} 6 \, dV$$

Kugel-
= Volumen
bekannt

$$6 \cdot \frac{4}{3} \pi = 8\pi$$

$$\int_{\partial\Omega} \langle \nabla f, n \rangle \, dA$$

$$= \int_{\partial\Omega} \left\langle \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\rangle \, dA$$

$$= \int_{\partial\Omega} 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 \, dA$$

$$= \int_{\partial\Omega} 2 \, dA$$

$$2 \, dA$$

Kugel-
= Oberfläche
bekannt
12,2

$$2 \cdot 4\pi = 8\pi$$

$$(b) \quad f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2$$

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta f(x_1, x_2, x_3) = 2 + 2 = 4$$

$$\int_{\Omega} \Delta f \, dV = \int_{\Omega} 4 \, dV = \frac{16}{3} \pi$$

$$\int_{\partial\Omega} \langle \nabla f, n \rangle \, dA = \int_{\partial\Omega} \left\langle \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\rangle \, dA$$

$$= \int_{\partial\Omega} 2x_1^2 + 2x_2^2 \, dA$$

Parametrisierung φ
aus 12.2

$$\int_0^1 \int_0^1 \left(2(s_{\pi t} c_{2\pi u})^2 + 2(s_{\pi t} s_{2\pi u})^2 \right) \cdot \underbrace{2\pi^2 s_{\pi t}}_{\|\varphi_t \times \varphi_u\|} \, dt \, du$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 4\pi^2 s_{\pi t}^3 \, dt \, du$$

$$= \int_0^1 4\pi^2 s_{\pi t}^3 \, dt = \frac{16}{3} \pi$$

$$(c) \quad f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2$$

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta f(x_1, x_2, x_3) = 2$$

$$\int_{\Omega} \Delta f \, dV = \int_{\Omega} 2 \, dV = \frac{8}{3} \pi$$

$$\int_{\partial \Omega} \langle \nabla f, n \rangle dA = \int_{\partial \Omega} \left\langle \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\rangle dA$$

$$= \int_{\partial \Omega} 2x_1^2 dA$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 2 \left(s_{\pi t} c_{2\pi u} \right)^2 \cdot 2\pi^2 s_{\pi t} dt du$$

$$= \underbrace{4\pi^2 \int_0^1 s_{\pi t}^3 dt}_{\frac{16}{3}\pi} \underbrace{\int_0^1 c_{2\pi u}^2 du}_{\frac{1}{2}} = \frac{8}{3}\pi$$

12.4

(a) (i) $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ with

$$\omega(x_1, x_2, x_3) = x_1 dx_2 \wedge dx_3$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow d\omega(x_1, x_2, x_3) &= \partial_1(x_1) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\ &\quad + \partial_2(x_1) dx_2 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\ &\quad + \partial_3(x_1) dx_3 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\ &= dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \end{aligned}$$

Stokes

$$\Rightarrow \int_C \underbrace{dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3}_{d\omega} = \int_{\partial C} \underbrace{x_1 dx_2 \wedge dx_3}_{\omega}$$

$$(2) \quad \omega(x_1, x_2, x_3) := x_2 \, dx_3 \wedge dx_1$$

$$\Rightarrow d\omega(x_1, x_2, x_3) = dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_1$$

$$= dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

$$\Rightarrow \int_C dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = \int x_2 \, dx_3 \wedge dx_1$$

$$(3) \quad \omega(x_1, x_2, x_3) := x_3 \, dx_1 \wedge dx_2$$

$$\Rightarrow d\omega(x_1, x_2, x_3) = dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2$$

$$= dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

Stokes

$$\Rightarrow \int_C dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = \int_{\partial C} x_3 \, dx_1 \wedge dx_2$$

$$(b) \quad c: [0,1]^3 \rightarrow \mathbb{R}^3:$$

$$(r, t, u) \mapsto \begin{pmatrix} r \sin t \cos 2\pi u \\ r \sin t \sin 2\pi u \\ r \cos t \end{pmatrix}$$

hat Jacobideterminante

$$\det \begin{pmatrix} \sin t \cos 2\pi u & r \pi \cos t \cos 2\pi u & -r \sin t \cdot 2\pi \sin 2\pi u \\ \sin t \sin 2\pi u & r \pi \cos t \sin 2\pi u & +r \sin t \cdot 2\pi \cos 2\pi u \\ r \cos t & -r \pi \sin t & 0 \end{pmatrix} = 2\pi^2 \sin t \, r^2$$

$$> 0$$

fast überall

$$\partial c = c_{1,1} - c_{1,0} - c_{2,1} + c_{2,0} + c_{3,1} - c_{3,0}$$

Wir verwenden $\int_{\partial c} x_1 dx_2 \wedge dx_3$ aus (a)

$c_{1,1}$: $c_{1,1}(t,u) \stackrel{r=1}{=} \begin{pmatrix} \frac{s_{\pi t} c_{2\pi u}}{s_{\pi t} s_{2\pi u}} \\ c_{\pi t} \end{pmatrix}$

$$\int_{c_{1,1}} x_1 dx_2 \wedge dx_3 = \int_{\mathbb{H}^2} C_{1,1}^* \left(x_1 dx_2 \wedge dx_3 \right)$$

$$= \int_{\mathbb{H}^2} \underbrace{\frac{s_{\pi t} c_{2\pi u}}{\text{von } x_1}}_{\substack{\partial_{\frac{1}{t}} \left(\frac{s_{\pi t} s_{2\pi u}}{\text{von } x_2} \right) \\ \partial_{\frac{2}{u}} \left(\frac{c_{\pi t}}{\text{von } x_3} \right)}} - \underbrace{\partial_{\frac{1}{t}} \left(\frac{c_{\pi t}}{\text{von } x_3} \right)}_{\partial_{\frac{2}{u}} \left(\frac{s_{\pi t} s_{2\pi u}}{\text{von } x_2} \right)} dt \wedge du$$

$c_{0,1}$: $= \int_{\mathbb{H}^2} s_{\pi t} c_{2\pi u} \cdot \left(-(-\pi s_{\pi t}) + s_{\pi t} \cdot \frac{2\pi c_{2\pi u}}{\text{von } x_2} \right) dt \wedge du$

$$= \int_0^1 \int_0^1 2\pi^2 s_{\pi t}^3 c_{2\pi u}^2 dt du$$

$$= \frac{4}{3} \pi$$

$c_{1,0}$: $r=0$ wegen $r=0$ konstant,

also $\int_{c_{1,0}} x_1 dx_2 \wedge dx_3 = 0$

$$\underline{C_{2,0}} : C_{2,0}(r,u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \int_{C_{2,0}} x_1 dx_2 \wedge dx_3 = \int_{\mathbb{H}^2} C_{2,0}^* (x_1 dx_2 \wedge dx_3)$$

$$= \int_{\mathbb{H}^2} \underbrace{0}_{\text{von } x_1} \cdot (\dots) dr \wedge du = 0$$

$$\underline{C_{2,1}} : C_{2,1}(r,u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{wie } C_{2,0}} \int_{C_{2,1}} x_1 dx_2 \wedge dx_3 = 0$$

$$\underline{C_{3,0}, C_{3,1}} : C_{3,0}(r,t) = \begin{pmatrix} r \sin t \\ 0 \\ r \cos t \end{pmatrix} = C_{3,1}(r,t)$$

$$\rightarrow \int_{C_{3,0}} x_1 dx_2 \wedge dx_3 = \int_{C_{3,1}} x_1 dx_2 \wedge dx_3$$

Insgesamt: das Volumen der Kugel von

Radius 1 ist $\int_C dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$

$$(a) \int_{\partial C} x_1 dx_2 \wedge dx_3 = \underbrace{\int_{C_{3,1}}}_{\frac{4}{3}\pi} - \underbrace{\int_{C_{1,0}}}_0 - \underbrace{\int_{C_{2,1}}}_0 + \underbrace{\int_{C_{2,0}}}_0 + \underbrace{\int_{C_{3,1}} - \int_{C_{3,0}}}_0 = \frac{4}{3}\pi$$

12.1

1

$$(a) \quad (\operatorname{rot} g)(x_1, x_2, x_3)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial g_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_3}{\partial x_2} - \frac{\partial g_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_3} - \frac{\partial g_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^3$ sternförmig und $\operatorname{rot} g = 0$

$\Rightarrow \exists u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\nabla u = g$.

$$(b) \quad (i) \quad \frac{\partial}{\partial x_1} u(x_1, x_2, x_3) = g_1(x_1, x_2, x_3)$$

$$= x_2 + x_3 + 1$$

$$\Rightarrow u(x_1, x_2, x_3) = \int x_2 + x_3 + 1 \, dx_1$$

$$= x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 + \underbrace{C(x_2, x_3)}$$

zu bestimmen

$$(ii) \quad \frac{\partial}{\partial x_2} u(x_1, x_2, x_3) = g_2(x_1, x_2, x_3)$$

$$(i) // \quad = x_1 + x_3 + 1$$

$$x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} C(x_2, x_3)$$

$$\Rightarrow C(x_2, x_3) = \int x_3 + 1 \, dx_2$$

$$= x_2 x_3 + x_2 + \underbrace{D(x_3)}_{\text{zu bestimmen}}$$

$$\Rightarrow u(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 + x_2 x_3 + x_2 + D(x_3)$$

$$(iii) \quad \frac{\partial}{\partial x_3} u(x_1, x_2, x_3) = g_3(x_1, x_2, x_3)$$

$$(ii) // \quad = x_1 + x_2 + 1$$

$$x_1 + x_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} D(x_3)$$

$$\Rightarrow D(x_3) = \int 1 \, dx_3 = x_3 + \underbrace{E}_{\text{konstante in } x_1, x_2, x_3, \text{ beliebig wählbar}}$$

Wahl $E = 0$.

Ein mögliches U ist also:

$$U(x_1, x_2, x_3)$$

$$= x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 + x_2 x_3 + x_2 + x_3$$

$$(c) (i) \int_{\Gamma} \vec{g} \cdot d\vec{s} \quad \text{symbolisch}$$

$$= \int_{\Gamma} g_1 dx_1 + g_2 dx_2 + g_3 dx_3$$

$$= \int_{[0,1]} C^* (g_1 dx_1 + g_2 dx_2 + g_3 dx_3)$$

$$\stackrel{\text{z.B. A10.11(a)}}{=} \int_{[0,1]} g_1(C(t)) C_1'(t) + g_2(C(t)) C_2'(t) + g_3(C(t)) C_3'(t) dt$$

$$= \int_0^1 \begin{pmatrix} g_1(C(t)) \\ g_2(C(t)) \\ g_3(C(t)) \end{pmatrix} \cdot \overset{\text{Leitf. d.h.}}{d} \begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \\ C_3'(t) \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^1 g(C(t)) \cdot C'(t) dt$$

$$= \dots$$

$$\dots = \int_0^1 \begin{pmatrix} t+t+1 \\ t+t+1 \\ t+t+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^1 6t+3 \, dt = 6$$

$$(ii) \int_{\gamma} g \cdot ds = u(1,1,1) - u(0,0,0)$$

$$= 6 - 0$$

$$= 6$$

13.2

Sei kurz $p = (t_1, t_2)$.

Wir beschreiben $\omega(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2, x_3) dx_{\underline{1}}$.

$$(a) \quad (c^* \omega)(p)$$

$$\stackrel{A. 10.1.(a)}{=} f(c(p)) \cdot \partial_1 c_{\underline{1}}(p) \, dt_1 \\ + f(c(p)) \cdot \partial_2 c_{\underline{1}}(p) \, dt_2$$

$$\Rightarrow (d(c^* \omega))(p)$$

$$\stackrel{\circ}{=} \partial_1 \left(f(c(p)) \cdot \partial_1 c_{\underline{1}}(p) \right) \underbrace{dt_1 \wedge dt_1}_0 \\ + \partial_2 \left(f(c(p)) \cdot \partial_1 c_{\underline{1}}(p) \right) \underbrace{dt_2 \wedge dt_1}_{= -dt_1 \wedge dt_2}$$

$$\dots + \partial_1 \left(f(c(p)) \partial_2 c_1(p) \right) dt_1 \wedge dt_2 \\ + \partial_2 \left(f(c(p)) \partial_1 c_1(p) \right) \underbrace{dt_2 \wedge dt_2}_0$$

Produktregel
=

$$- \partial_2 \left(f(c(p)) \right) \cdot \partial_1 c_1(p) dt_1 \wedge dt_2 \\ - \cancel{f(c(p)) \cdot \partial_2 \partial_1 c_1(p) dt_1 \wedge dt_2} \\ + \partial_1 \left(f(c(p)) \right) \partial_2 c_1(p) dt_1 \wedge dt_2 \\ + \cancel{f(c(p)) \partial_1 \partial_2 c_1(p) dt_1 \wedge dt_2}$$

Leibnizregel
=

$$- (\partial_1 f)(c(p)) \cdot \cancel{\partial_2 c_1(p)} \cdot \partial_1 c_1(p) dt_1 \wedge dt_2 \\ - (\partial_2 f)(c(p)) \cdot \partial_2 c_2(p) \cdot \partial_1 c_1(p) dt_1 \wedge dt_2 \\ - (\partial_3 f)(c(p)) \cdot \partial_2 c_3(p) \cdot \partial_1 c_1(p) dt_1 \wedge dt_2 \\ + (\partial_1 f)(c(p)) \cdot \cancel{\partial_1 c_1(p)} \cdot \partial_2 c_1(p) dt_1 \wedge dt_2 \\ + (\partial_2 f)(c(p)) \cdot \partial_1 c_2(p) \cdot \partial_2 c_1(p) dt_1 \wedge dt_2 \\ + (\partial_3 f)(c(p)) \cdot \partial_1 c_3(p) \cdot \partial_2 c_1(p) dt_1 \wedge dt_2$$

$$\begin{aligned}
 (b) \quad (d\omega)(x_1, x_2, x_3) &= 0 \\
 &= (\partial_1 f)(x_1, x_2, x_3) \underbrace{dx_1 \wedge dx_2}_{= -dx_2 \wedge dx_1} \\
 &\quad + (\partial_2 f)(x_1, x_2, x_3) \underbrace{dx_2 \wedge dx_3}_{= -dx_3 \wedge dx_2} \\
 &\quad + (\partial_3 f)(x_1, x_2, x_3) \underbrace{dx_3 \wedge dx_1}_{= -dx_1 \wedge dx_3}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (c^*(d\omega))(p)$$

$$\begin{aligned}
 \stackrel{10.1.1(a)}{=} & -(\partial_2 f)(c(p)) \cdot \left(\underbrace{\partial_1 c_1(p)}_{\text{blue}} \cdot \underbrace{\partial_2 c_2(p)}_{\text{blue}} \right. \\
 & \left. - \underbrace{\partial_1 c_2(p)}_{\text{blue}} \cdot \underbrace{\partial_2 c_1(p)}_{\text{blue}} \right) dt_1 \wedge dt_2 \\
 & - (\partial_3 f)(c(p)) \left(\underbrace{\partial_1 c_1(p)}_{\text{blue}} \cdot \underbrace{\partial_2 c_3(p)}_{\text{blue}} \right. \\
 & \left. - \underbrace{\partial_1 c_3(p)}_{\text{blue}} \cdot \underbrace{\partial_2 c_1(p)}_{\text{blue}} \right) dt_1 \wedge dt_2
 \end{aligned}$$

(c) Es ist $d(c^*\omega) = c^*(d\omega)$,
 wie wir oben in (a), (b)
 in blau verifizieren.

13,3 Sei $f(p, q) := \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} - ab$

Sei $g(p, q) := \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$

Unter der Nebenbedingung $g(p, q) = 0$
 sagt die Youngsche Ungleichung, dass
 $f(p, q) \geq 0$ ist.

Ausatz nach Lagrange

$$\begin{cases} \nabla f(p, q) = \lambda \nabla g(p, q) \\ g(p, q) = 0 \end{cases}$$

$$(\Leftrightarrow) \begin{cases} -\frac{1}{p^2} a^p + \frac{1}{p} \ln(a) a^p = -\frac{1}{p^2} \cdot \lambda \\ -\frac{1}{q^2} b^q + \frac{1}{q} \ln(b) b^q = -\frac{1}{q^2} \cdot \lambda \\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \end{cases}$$

Dies führt auf

$$a^p - p \ln(a) a^p = \lambda = b^q - q \ln(b) b^q$$

$$\parallel \parallel$$

$$a^p (1 - \ln(a^p)) \quad b^q (1 - \ln(b^q))$$

Für $u(x) := x(1 - \ln(x))$

ist $u'(x) = 1 - \ln(x) + x \cdot (-\frac{1}{x})$

$$= -\ln(x) < 0 \quad \text{für } x > 1.$$

Also ist u auf $(1, +\infty)$ injektiv.

Wegen $a, b > 1$ impliziert

$$u(a^p) = u(b^q)$$

also $a^p = b^q$.

Es wird dann fall,

$$f(p, q) = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} - ab$$

$$-1 = \frac{a^p}{p} + \frac{a^p}{q} - a \cdot a^{\frac{p}{q}}$$

$$= a^p \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) - a^{\frac{p}{p} + \frac{p}{q}}$$

$$= a^p - a^p = 0$$

○ Somit ist der minimale Wert
von $f(p, q)$ tatsächlich 0.