20

Das Lebesgueintegral

Wir erklären nun das *Lebesgueintegral* für Funktionen

$$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

Dabei gehen wir wie beim Cauchyintegral vor, indem wir das Integral zuerst für Treppenfunktionen definieren. Dabei genügt es, Maße für Intervalle zu betrachten. Eine allgemeine Maßtheorie wird nicht benötigt.

Dieses Integral wird auf solche nichtnegativen Funktionen ausgedehnt, die sich *punktweise* von unten durch Treppenfunktionen approximieren lassen. Dabei spielt gleichmäßige Konvergenz keine Rolle. Lassen wir auch den Wert ∞ zu, so ist das Integral für *jede* solche Funktion erklärt. Erst im dritten Schritt wird das Integral für allgemeine Funktionen als Differenz der Integrale ihres Positiv- und Negativteils erklärt. Diese Teilintegrale müssen allerdings endlich sein, damit deren Differenz wohldefiniert und endlich ist.

Das Lebesgueintegral ist von vornherein auf dem ganzen $\mathbb{R}^n$ erklärt. Das Integral über messbare Teilmengen erhält man hieraus durch Multiplikation mit deren charakteristischen Funktionen. Es gibt daher kein uneigentliches Lebesgueintegral, vielmehr ist das ›eigentliche Integral‹ ein Spezialfall des allgemeinen Lebesgueintegrals.

Die besondere Bedeutung des Lebesgueintegrals für die Analysis liegt darin, dass es mit Grenzübergängen unter sehr allgemeinen Bedingungen vertauscht.

20.1 Intervallfunktionen

Ein *Intervall* im $\mathbb{R}^n$ oder kurz *n-Intervall* ist das kartesische Produkt

$$I = I^1 \times .. \times I^n$$

aus n reellen Intervallen $I^1, .., I^n$.[1] Diese können offen, einseitig offen, abgeschlossen, beschränkt, unbeschränkt, zu einem Punkt entartet oder leer sein. Sind sie *alle* offen respektive abgeschlossen respektive beschränkt respektive kompakt, so ist es auch ihr Produkt. Ist dagegen *ein* reelles Intervall I^j entartet respektive leer, so ist auch das Produkt I entartet respektive leer.

Die Vereinigung zweier n-Intervalle ist im Allgemeinen kein n-Intervall. Für Durchschnitte gilt jedoch folgendes Lemma, dessen Beweis als Übung überlassen wird.

1 **Lemma** *Ist $(I_k)_{k \geqslant 1}$ eine Folge beliebiger n-Intervalle, so ist auch deren Durchschnitt ein n-Intervall.* ⋊

▪ Intervallfunktionen

Sei $\mathfrak{J}^n$ die Familie aller *beschränkten* n-Intervalle. Unbeschränkte Intervalle bleiben also außen vor.

Definition *Eine Intervallfunktion ist eine Funktion $\mu \colon \mathfrak{J}^n \to \mathbb{R}$. Diese heißt*

(i) *additiv, wenn für alle $I_1, I_2 \in \mathfrak{J}^n$*

$$I_1 \cap I_2 = \varnothing \ \wedge \ I_1 \cup I_2 \in \mathfrak{J}^n \quad \Rightarrow \quad \mu(I_1 \cup I_2) = \mu(I_1) + \mu(I_2),$$

(ii) *monoton, wenn für alle $I_1, I_2 \in \mathfrak{J}^n$*

$$I_1 \subset I_2 \quad \Rightarrow \quad \mu(I_1) \leqslant \mu(I_2),$$

(iii) *regulär, wenn zu jedem Intervall $I \in \mathfrak{J}^n$ und $\varepsilon > 0$ ein offenes Intervall $I_o \supset I$ existiert, so dass*

$$|\mu(I_o) - \mu(I)| < \varepsilon. \quad ⋊$$

[1] Im Folgenden bezeichnet ein Hochindex 1-Intervalle, ein Tiefindex n-Intervalle.

Abb 1

Entartete und nichtentartete 2-Intervalle

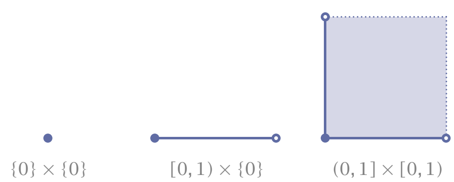


Abb 2

Intervall als Vereinigung von Intervallen

Man beachte, dass für die Additivität nur solche Intervalle betrachtet werden, deren Vereinigung wieder ein Intervall ist. — Nun einige einfache Bemerkungen.

2 **Lemma** *Ist eine Intervallfunktion μ additiv, so ist $\mu(\varnothing) = 0$.* ⋊

⟨⟨⟨⟨ Da $\varnothing \in \mathfrak{I}^n$ und $\varnothing = \varnothing \cup \varnothing$, gilt auch $\mu(\varnothing) = \mu(\varnothing \cup \varnothing) = \mu(\varnothing) + \mu(\varnothing)$. Daraus folgt die Behauptung. ⟩⟩⟩⟩

3 **Lemma** *Eine Intervallfunktion μ ist additiv genau dann, wenn für je endlich viele disjunkte Intervalle $I_1, .., I_m \subset \mathfrak{I}^n$ gilt:*

$$I = \bigcup_{1 \leqslant k \leqslant m} I_k \in \mathfrak{I}^n \quad \Rightarrow \quad \mu(I) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant m} \mu(I_k). \qquad ⋊$$

Man beachte, dass $I = I_1 \cup .. \cup I_m$ wieder ein Intervall sein muss.

⟨⟨⟨⟨ Der Beweis ist elementar, aber etwas umständlich, da man nicht direkt per Induktion vorgehen kann. Vielmehr zerlegt man zuerst die Intervalle I_k so in kleinere Intervalle, dass sich $\mu(I_k)$ durch Induktion als Summe ihrer Maße darstellen lässt. Danach erhält man ebenso das Gesamtmaß $\mu(I)$ durch Induktion – siehe Abbildung 2. Die Details übergehen wir. ⟩⟩⟩⟩

4 **Lemma** *Eine additive Intervallfunktion μ ist monoton genau dann, wenn sie nichtnegativ ist.* ⋊

⟨⟨⟨⟨ Ist μ monoton, so gilt für jedes Intervall $I \in \mathfrak{I}^n$ wegen $\varnothing \subset I$ auch $\mu(\varnothing) \leqslant \mu(I)$. Wegen $\mu(\varnothing) = 0$ ${}_{2}$ ist also μ nichtnegativ.

Sei umgekehrt μ nichtnegativ. Sind $J \subset I$ zwei Intervalle in $\mathfrak{I}^n$, so ist die Differenz $I \setminus J$ darstellbar als Vereinigung disjunkter Intervalle $J_1, .., J_m$ ${}_{\text{A-8}}$. Mit $I = J \cup J_1 \cup .. \cup J_m$, der Additivität ${}_{3}$ und Nichtnegativität von μ folgt

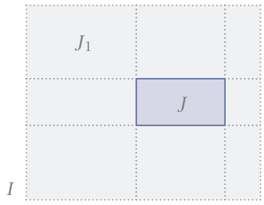
$$\mu(I) = \mu(J) + \mu(J_1) + .. + \mu(J_m) \geqslant \mu(J).$$

Also ist μ auch monoton. ⟩⟩⟩⟩

5 **Lemma** *Eine monotone Intervallfunktion μ ist regulär genau dann, wenn es zu jedem Intervall $I \in \mathfrak{I}^n$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein offenes Intervall $I_o \supset I$ gibt, so dass $\mu(I_o) \leqslant \mu(I) + \varepsilon$.* ⋊

Abb 3

Darstellung von $I \setminus J$



⟪⟪ Ist μ monoton, so gilt für $I_0 \supset I$ immer $\mu(I_0) \geqslant \mu(I)$. Es muss also nur noch $\mu(I_0) \leqslant \mu(I) + \varepsilon$ gefordert werden, um $|\mu(I_0) - \mu(I)| < \varepsilon$ zu erhalten. ⟫⟫

▪ Maße

Wir spezifizieren nun diejenigen Intervallfunktionen, die sich für die Definition eines Integrals eignen.

Definition *Ein Maß ist eine additive, monotone, reguläre Intervallfunktion.* ⋊

Insbesondere ist also ein Maß μ immer nichtnegativ mit $\mu(\varnothing) = 0$. In der Maßtheorie ist der Begriff des Maßes wesentlich allgemeiner. Die hier gewählte Definition reicht aber für unsere Bedürfnisse.

▹ *Beispiele für Maße* A. Bezeichnet $|\cdot|$ die euklidische Länge eines eindimensionalen Intervalls, so wird für $I = I^1 \times .. \times I^n \in \mathfrak{J}^n$ durch

$$\lambda_n(I) = \lambda_n(I^1 \times .. \times I^n) \coloneqq \prod_{1 \leqslant \nu \leqslant n} |I^\nu|$$

das *Volumenmaß* λ_n auf $\mathbb{R}^n$ erklärt. Für $n = 1$ sprechen wir auch vom *Längenmaß*, für $n = 2$ vom *Flächenmaß*.

B. Sei $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ eine *diskrete Menge*, also eine Menge ohne Häufungspunkte. Eine beliebige Funktion

$$m : \Lambda \to (0, \infty)$$

ordnet jedem Punkt $p \in \Lambda$ eine *Masse* $m(p)$ zu. Mit der Definition

$$m(I) \coloneqq \sum_{p \in I \cap \Lambda} m(p), \qquad I \in \mathfrak{J}^n,$$

dehnen wir m zu einem Maß aus, genannt *diskrete Masseverteilung* auf Λ. Man beachte, dass $I \cap \Lambda$ immer endlich ist, auch wenn Λ unendlich ist.

C. Die *konstante Verteilung* $\nu : \Lambda \to \{1\}$ ist ein Spezialfall einer diskreten Masseverteilung. In diesem Fall ist

$$\nu(I) = \operatorname{card}(I \cap \Lambda),$$

also die Anzahl der Punkte in Λ, die in I liegen. Daher spricht man auch von einem *Zählmaß*. Zählmaße auf $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{Z}$ erlauben es, Reihen als Integrale zu betrachten. Alle Sätze über das Lebesgueintegral gelten damit entsprechend auch für Reihen.

D. Jede monoton steigende Funktion $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert auf $\mathcal{J}^1$ durch

$$\mu_\varphi([a,b]) := \varphi_+(b) - \varphi_-(a), \qquad \mu_\varphi((a,b]) := \varphi_+(b) - \varphi_+(a),$$
$$\mu_\varphi([a,b)) := \varphi_-(b) - \varphi_-(a), \qquad \mu_\varphi((a,b)) := \varphi_-(b) - \varphi_+(a),$$

das sogenannte *Lebesgue-Stieltjes-Maß* μ_φ zur *Verteilungsfunktion* φ A-9. Ist zum Beispiel s eine Sprungstelle von φ, so ist

$$\mu_\varphi(\{s\}) = \varphi_+(s) - \varphi_-(s) > 0$$

die Sprunghöhe von φ in diesem Punkt.

E. Ein Maß μ_r auf $\mathbb{R}^r$ und ein Maß μ_s auf $\mathbb{R}^s$ definieren ein *Produktmaß* $\mu_{r,s} = \mu_r \times \mu_s$ auf $\mathbb{R}^{r+s}$. Denn jedes $I \in \mathcal{J}^{r+s}$ hat eine eindeutige Darstellung

$$I = I_r \times I_s, \qquad I_r \in \mathcal{J}^r, \quad I_r \in \mathcal{J}_s,$$

und

$$\mu_{r,s}(I) = \mu_{r,s}(I_r \times I_s) := \mu_r(I_r)\mu_s(I_s)$$

ergibt ein wohldefiniertes Maß auf $\mathcal{J}^{r+s}$.

F. Für das Volumenmaß gilt beispielsweise

$$\lambda_2 = \lambda_1 \times \lambda_1, \qquad \lambda_3 = \lambda_2 \times \lambda_1 = \lambda_1 \times \lambda_1 \times \lambda_1,$$

und so weiter.

G. Ist $A \in \mathcal{J}^n$ mit $\lambda(A) > 0$ fest gewählt, so definiert

$$\lambda_A(I) := \frac{\lambda(I \cap A)}{\lambda(A)}$$

das *relative Volumenmaß* λ_A. Für jedes Intervall $I \supset A$ gilt dann $\lambda_A(I) = 1$. ◁

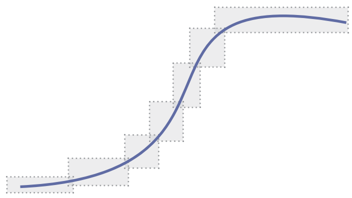
Im Folgenden wird λ_n oder kürzer λ immer das Volumenmaß bezeichnen, auch wenn wir dies nicht jedes Mal erwähnen.

Nullmengen

Ein Charakteristikum des zu definierenden Integrals ist, dass alles ignoriert werden kann, was auf *Nullmengen* stattfindet. Diese Mengen werden deshalb eine wichtige Rolle spielen.

Abb 4

Überdeckung einer λ_2-Nullmenge



Definition *Sei μ ein Maß auf $\mathfrak{I}^n$. Eine Menge $N \subset \mathbb{R}^n$ heißt μ-Nullmenge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Folge von n-Intervallen $(I_k)_{k\geqslant 1}$ gibt, so dass*

$$N \subset \bigcup_{k\geqslant 1} I_k, \qquad \sum_{k\geqslant 1} \mu(I_k) < \varepsilon. \qquad ⋊$$

Bemerkungen *a.* Eine μ-Nullmenge N kann also durch abzählbar viele Intervalle mit beliebig kleinem Gesamtmaß überdeckt werden. Dabei ist N eine völlig beliebige Menge. Sie kann zum Beispiel auch unbeschränkt sein.

b. Wird N bereits durch *endlich* viele Intervalle derart überdeckt, so ist N ebenfalls eine μ-Nullmenge. Denn wir können diese durch leere Intervalle zu einer abzählbar unendlichen Folge $(I_k)_{k\geqslant 1}$ ergänzen, die wegen $\mu(\varnothing) = 0$ die gewünschten Eigenschaften hat.

c. Jede Teilmenge einer μ-Nullmenge ist ebenfalls eine μ-Nullmenge.

d. Es hängt immer vom Maß μ ab, ob eine Menge eine Nullmenge ist – siehe Beispiele unten. ⊸

Vor den Beispielen zunächst eine grundlegende Beobachtung.

6 **Lemma** *Die abzählbare Vereinigung von μ-Nullmengen ist wieder eine μ-Nullmenge.* ⋊

⟪⟪ Sei $(N_k)_{k\geqslant 1}$ eine Folge von Nullmengen, N deren Vereinigung und $\varepsilon > 0$. Dann existiert zu jedem $k \geqslant 1$ eine Folge von Intervallen $(I_{k,l})_{l\geqslant 1}$ mit

$$N_k \subset \bigcup_{l\geqslant 1} I_{k,l}, \qquad \sum_{l\geqslant 1} \mu(I_{k,l}) < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Die Vereinigung aller dieser Intervalle $I_{k,l}$ ist wieder abzählbar $_{3.24}$, und es gilt

$$N = \bigcup_{k\geqslant 1} N_k \subset \bigcup_{k,l\geqslant 1} I_{k,l}.$$

Außerdem gilt

$$\sum_{k,l\geqslant 1} \mu(I_{k,l}) = \sum_{k\geqslant 1} \Bigl(\sum_{l\geqslant 1} \mu(I_{k,l}) \Bigr) < \sum_{k\geqslant 1} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

Da also zu jedem $\varepsilon > 0$ eine solche Überdeckung existiert, ist N ebenfalls eine μ-Nullmenge. ⟫⟫

A. Jedes Intervall $I \in \mathcal{J}^n$ mit $\mu(I) = 0$ ist eine μ-Nullmenge.

B. Jede endliche oder abzählbare Menge ist eine λ_n-Nullmenge.

C. Insbesondere ist $\mathbb{Q}$ eine λ_1-Nullmenge in $\mathbb{R}$.

D. Jede Hyperebene im $\mathbb{R}^n$ ist eine λ_n-Nullmenge.

E. Der Graph einer stetigen Funktion $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}$ ist eine λ_2-Nullmenge.

F. Ist m eine beliebige Masseverteilung auf der diskreten Menge $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$, so ist *jede Menge* $N \subset \mathbb{R}^n$, die keinen Punkt von Λ enthält, eine m-Nullmenge.

G. Ist die monoton steigende Funktion $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konstant auf einem Intervall K, so ist jedes Intervall $I \subset K$ eine μ_φ-Nullmenge.

Im Beweis des Satzes von Tonelli 21.1 benötigen wir noch folgende äquivalente Charakterisierung einer μ-Nullmenge.

7 **Lemma** *Eine Menge N ist eine μ-Nullmenge genau dann, wenn es eine Überdeckung (I_k) durch Intervalle gibt, so dass deren μ-Gesamtmaß endlich ist und jeder Punkt von N von unendlich vielen Intervallen überdeckt wird.*

⇒ Zu jedem $k \geqslant 1$ existiert eine Überdeckung $(I_{k,l})_{l\geqslant 1}$ von N mit Gesamtmaß kleiner als $1/2^k$. Die *gesamte* Familie $(I_{k,l})_{k,l\geqslant 1}$ ist dann eine Überdeckung von N mit endlichem Gesamtmaß, wobei jeder Punkt von Intervallen beliebig kleinen Maßes überdeckt wird. Also wird jeder Punkt unendlich oft überdeckt.

⇐ Sei (I_k) eine solche Überdeckung. Zu $\varepsilon > 0$ existiert dann ein K mit

$$\sum_{k\geqslant K} \mu(I_k) < \varepsilon,$$

und $(I_k)_{k\geqslant K}$ ist immer noch eine Überdeckung von N. Also ist N eine μ-Nullmenge.

μ-fast überall

Nun vereinbaren wir noch einige Redeweisen.

Eine Funktion f heißt *μ-definiert* auf $\mathbb{R}^n$, wenn es eine μ-Nullmenge N gibt, so dass f auf N^c definiert ist. Ist (f_k) eine Folge μ-definierter Funktionen, so gibt es auch *eine* gemeinsame μ-Nullmenge N, so dass *alle* f_k auf N^c definiert sind 6. Man sagt dann auch, die Folge $(f_k)_{k\geqslant 1}$ sei *μ-definiert*.

Allgemeiner sagt man, eine Eigenschaft gilt *μ-fast überall* auf $\mathbb{R}^n$, wenn es eine μ-Nullmenge N gibt, so dass diese Eigenschaft auf N^c gilt. So heißen zum Beispiel zwei Funktionen f und g *μ-fast überall gleich*, geschrieben

$$f =_\mu g,$$

Abb 5

Differenz zweier Intervalle

wenn es eine μ-Nullmenge N gibt, so dass f und g auf N^c definiert sind und dort übereinstimmen. Entsprechend sind $f \leqslant_\mu g$ und $f \geqslant_\mu g$ erklärt.

Vorsicht ist beim Begriff der Stetigkeit nötig. Eine Funktion f heißt *μ-stetig*, wenn es eine μ-Nullmenge N gibt, so dass $f \mid N^c$ stetig ist. Das heißt, es wird *nur* die Einschränkung von f auf N^c betrachtet – ihre Werte auf N werden völlig ignoriert. Die Aussage, f ist *stetig bis auf eine μ-Nullmenge*, ist dagegen wesentlich stärker. Gemeint ist hier, dass die Menge der Unstetigkeitspunkte von f eine Nullmenge bilden, und hierbei werden *alle* Punkte im Definitionsbereich betrachtet.

Beispiel Die Dirichletfunktion $\chi_\mathbb{Q}$ ist λ-stetig. Denn nehmen wir die λ-Nullmenge der rationalen Zahlen weg, so bleibt die Nullfunktion auf $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Die Dirichletfunktion ist aber auf $\mathbb{R}$ in keinem einzigen Punkt stetig und daher auch nicht stetig bis auf eine λ-Nullmenge.

Schließlich heißt eine Funktionenfolge (f_k) *μ-fast überall konvergent* oder kurz *μ-konvergent* gegen eine Funktion f, wenn es eine μ-Nullmenge N gibt, so dass alle f_k auf N^c definiert sind und dort punktweise gegen f konvergieren. Dafür schreiben wir auch $f_k \to_\mu f$. Entsprechend ist eine *μ-monotone* Funktionenfolge definiert.

Zulässige Mengen

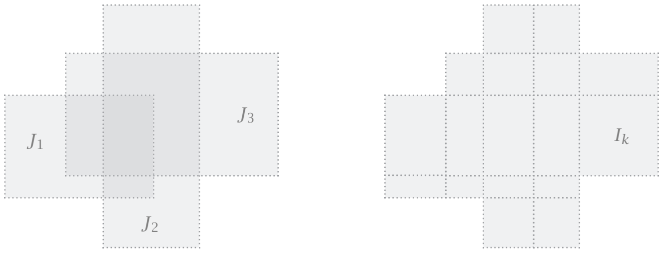
Vereinigung und Differenz von Intervallen sind im Allgemeinen *keine* Intervalle. Daher betrachten wir nun die größere Familie der *zulässigen Mengen.*

Definition *Jede Vereinigung von endlich vielen Intervallen in $\mathcal{J}^n$ heißt eine zulässige Menge im $\mathbb{R}^n$. Ihre Familie wird mit $\mathcal{Z}^n$ bezeichnet.*

Da die Intervalle in $\mathcal{J}^n$ beschränkt sind, ist es auch jede zulässige Menge. Außerdem bildet $\mathcal{Z}^n$ einen *Mengenkörper:*

8 **Satz** *Vereinigung, Durchschnitt und Differenz endlich vieler zulässiger Mengen sind wieder zulässige Mengen. Somit bildet $\mathcal{Z}^n$ einen Mengenkörper.*

Abb 6 Darstellung einer zulässigen Menge



Seien $M = I_1 \cup .. \cup I_m$ und $N = J_1 \cup .. \cup J_n$ zulässige Mengen. Es ist klar, dass deren Vereinigung wieder eine zulässige Menge ist. Ihr Durchschnitt ist

$$M \cap N = \bigcup_{k,l} (I_k \cap J_l).$$

Jeder Schnitt $I_k \cap J_l$ ist ein beschränktes n-Intervall [1], und die Vereinigung ist endlich. Also ist $M \cap N$ ebenfalls zulässig.

Ihre Differenz können wir darstellen als

$$M \setminus N = (I_1 \cup .. \cup I_m) \setminus (J_1 \cup .. \cup J_n) = \bigcup_{1 \leqslant k \leqslant m} \Big\{ \bigcap_{1 \leqslant l \leqslant n} I_k \setminus J_l \Big\}.$$

Jede Differenz $I_k \setminus I_l$ ist eine zulässige Menge, wie man elementar beweist. Durchschnitt und Vereinigung ergeben hieraus wieder zulässige Mengen, wie bereits gezeigt wurde. Also ist auch $M \setminus N$ zulässig.

Wichtig für die Definition des Integrals ist die Beobachtung, dass zulässige Mengen immer als Vereinigung *disjunkter* Intervalle geschrieben werden können.

9 **Lemma** *Jede zulässige Menge $M = J_1 \cup .. \cup J_n$ kann geschrieben werden als Vereinigung paarweise disjunkter Intervalle $I_1, .., I_m$ mit*

$$I_k \cap J_l \neq \varnothing \quad \Rightarrow \quad I_k \subset J_l$$

für alle k, l. Jedes I_k ist also ganz oder gar nicht in jedem J_l enthalten.

Der Beweis sei als Übung überlassen.

20.2 Treppenfunktionen

Definition *Eine Treppenfunktion auf dem $\mathbb{R}^n$ ist eine Funktion der Gestalt*

$$s = \sum_{1 \le k \le m} c_k \chi_{I_k}$$

mit endlich vielen Intervallen $I_k \in \mathfrak{J}^n$ und reellen Zahlen $c_k \in \mathbb{R}$. Der Raum aller solchen Treppenfunktionen wird mit $\mathcal{T}^n$ bezeichnet. ⋊

Jede Treppenfunktion s nimmt nur endlich viele Werte an und ist damit *beschränkt*. Ihr *Träger*, also die *abgeschlossene* Menge

$$\operatorname{supp}(s) := \{s \neq 0\}^{-},$$

ist ebenfalls beschränkt, somit kompakt, und eine zulässige Menge.

Jede Treppenfunktion s besitzt unendlich viele solcher Darstellungen. Insbesondere gibt es auch immer Darstellungen mit disjunkten Intervallen I_k 9. Diese nennen wir ein *mit s verträgliches System*, und die einzelnen Intervalle heißen *Konstanzintervalle* von s. Ein einziges verträgliches System gibt es auch für jede endliche Zahl von Treppenfunktionen:

10 **Lemma** *Zu je endlich vielen Treppenfunktionen gibt es immer ein gemeinsames verträgliches System von Konstanzintervallen.* ⋊

⟨⟨⟨⟨ Seien $s_1, .., s_n$ Treppenfunktionen, und seien $I_{k,1}, .., I_{k,l_k}$ die Konstanzintervalle von s_k. Die Vereinigung dieser endlich vielen Intervalle ist eine zulässige Menge. Es gibt daher 9 paarweise disjunkte Intervalle $J_1, .., J_r$ so, dass

$$\bigcup_{1 \le i \le r} J_i = \bigcup_{1 \le k \le n} \bigcup_{1 \le l \le l_k} I_{k,l},$$

wobei jedes J_i ganz oder gar nicht in jedem dieser $I_{k,l}$ enthalten ist. Somit ist jedes J_i Konstanzintervall jeder Treppenfunktion s_k. Also bildet $J_1, .., J_r$ ein mit allen $s_1, .., s_n$ verträgliches System. ⟩⟩⟩⟩

11 **Lemma** *Sind s und t Treppenfunktionen, so sind es auch*

$$s + t, \quad st, \quad \max(s,t), \quad \min(s,t), \quad |s|$$

sowie αs für $\alpha \in \mathbb{R}$. Somit bildet $\mathcal{T}^n$ einen reellen Vektorraum, sogar eine reelle Algebra. ⋊

⟨⟨⟨⟨ Betrachte zum Beispiel das Maximum. Wählen wir zu s und t ein gemeinsames verträgliches System von Konstanzintervallen $I_1, .., I_m$ 10, so ist

$$s = \sum_{1 \le k \le m} a_k \chi_{I_k}, \qquad t = \sum_{1 \le k \le m} b_k \chi_{I_k}.$$

Dann gilt

$$\max(s,t) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant m} \max(a_k, b_k)\chi_{I_k}.$$

Also ist $\max(s,t)$ ebenfalls eine Treppenfunktion. ⟫⟫

■ Integral

Das Lebesgueintegral einer Treppenfunktion wird nun wie beim Cauchyintegral definiert. Der einzige Unterschied ist, dass wir Intervalle mit einem allgemeineren Maß als nur dem Volumenmaß messen können.

Definition *Sei*

$$s = \sum_{1 \leqslant k \leqslant m} c_k \chi_{I_k}$$

eine Treppenfunktion mit disjunkten Intervallen $I_k \in \mathfrak{J}^n$. Dann ist das Lebesgueintegral von s bezüglich eines Maßes μ oder kurz das μ-Integral von s definiert als die reelle Zahl

$$I_\mu(s) := \sum_{1 \leqslant k \leqslant m} c_k \mu(I_k).$$

Das Integral von Treppenfunktionen ist immer *endlich*, da alle Intervalle beschränkt sind und die Summe endlich ist.

Diese Definition ist natürlich erst gerechtfertigt, wenn wir zeigen, dass der Wert des Integrals nicht von der Darstellung von s abhängt. Der Beweis beruht darauf, dass es zu je zwei verschiedenen verträglichen Systemen von Konstanzintervallen einer Treppenfunktion immer ein weiteres solches System gibt, dessen Intervalle ganz oder gar nicht in den vorliegenden Intervallen enthalten sind $_{10}$. Der Rest ist dann Routine.

A. Für das Längenmaß λ ist dies das Cauchyintegral $_{11.1}$.

B. Für eine Masseverteilung m auf einer diskreten Menge Λ ist

$$I_m(s) = \sum_{p \in \Lambda} s(p) m(p),$$

wobei wegen der Kompaktheit des Trägers von s die Summe sich nur über die endlich vielen Punkte in $\Lambda \cap \operatorname{supp}(s)$ erstreckt. Die Summe ist also endlich, auch wenn Λ keine endliche Menge ist.

C. Bezüglich des Zählmaßes ν auf $\mathbb{N}$ ist jede Funktion $a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit beschränktem Träger eine Treppenfunktion, und

$$I_\nu(a) = \sum_{n \geqslant 1} a(n).$$

12 **Satz** *Das μ-Integral auf $\mathcal{T}^n$ ist linear, monoton, und dreieckig. Für Treppenfunktionen s, t und reelle Zahlen α, β gilt also*

(i) *Linearität:* $I_\mu(\alpha s + \beta t) = \alpha I_\mu(s) + \beta I_\mu(t)$,

(ii) *Monotonie:* $s \leqslant t \;\Rightarrow\; I_\mu(s) \leqslant I_\mu(t)$,

(iii) *Dreiecksungleichung:* $|I_\mu(s)| \leqslant I_\mu(|s|)$. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Die letzten beiden Eigenschaften folgen aus der Positivität des Maßes. So ist zum Beispiel mit einem verträglichen Intervallsystem

$$|I_\mu(s)| = \left| \sum_{1 \leqslant k \leqslant m} c_k \mu(I_k) \right| \leqslant \sum_{1 \leqslant k \leqslant m} |c_k|\, \mu(I_k) = I_\mu(|s|).$$

Alles andere ist Routine. ⟩⟩⟩⟩⟩

▪ Ausdehnung des Maßes

Die charakteristische Funktion einer zulässigen Menge ist ebenfalls eine Treppenfunktion $_9$. Wir können damit jedes Intervallmaß μ ausdehnen zu einer Funktion

$$\tilde{\mu} : \mathcal{Z}^n \to [0, \infty), \quad \tilde{\mu}(M) := I_\mu(\chi_M).$$

Für ein Intervall $I \in \mathcal{J}^n$ gilt insbesondere

$$\tilde{\mu}(I) = I_\mu(\chi_I) = 1 \cdot \mu(I) = \mu(I),$$

denn χ_I ist eine Treppenfunktion mit Konstanzintervall I und Wert 1. Somit gilt $\tilde{\mu}\,|\,\mathcal{J}^n = \mu$, und $\tilde{\mu}$ definiert eine Fortsetzung von μ auf $\mathcal{Z}^n$. Im Weiteren schreiben wir hierfür ebenfalls wieder μ.

13 **Satz** *Die auf $\mathcal{Z}^n$ ausgedehnte Funktion μ ist ebenfalls additiv, monoton und regulär. Für zulässige Mengen M und N mit $N \subset M$ gilt außerdem*

$$\mu(M \setminus N) = \mu(M) - \mu(N). \quad ⋊$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Sind M und N zulässig und $N \subset M$, so ist auch $O = M \setminus N$ zulässig $_8$, und $M = N \cup O$ ist eine disjunkte Vereinigung zulässiger Mengen. Aufgrund der Additivität ist dann

$$\mu(M) = \mu(N) + \mu(O) = \mu(N) + \mu(M \setminus N).$$

Da alle Terme *endlich* sind, folgt hieraus die letzte Behauptung. Alles Weitere ist als Übung überlassen. ⟩⟩⟩⟩⟩

Drei Hilfssätze

Für den weiteren Aufbau der Theorie benötigen wir drei Resultate über Folgen von Treppenfunktionen und deren Integral.

14 **Lemma A** *Sei* (s_k) *eine steigende Folge in* $\mathcal{T}^n$. *Gilt*

$$\lim_{k\to\infty} I_\mu(s_k) < \infty,$$

so gilt auch $\lim_{k\to\infty} s_k <_\mu \infty$. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Wir beginnen die Indizierung bei 0. Indem wir zur Folge $(s_k - s_0)$ übergehen, können wir auch $s_k \geqslant 0$ für alle $k \geqslant 0$ annehmen. Zu zeigen ist, dass

$$N = \{x \in \mathbb{R}^n : s_k(x) \to \infty\}$$

eine Nullmenge bildet.

Sei dazu $L = \lim I_\mu(s_k)$ und $M > 0$ beliebig. Für jedes k ist

$$E_k = \{s_k > M\} := \{x \in \mathbb{R}^n : s_k(x) > M\}$$

die Vereinigung endlich vieler Konstanzintervalle von s_k und damit zulässig. Ferner ist $s_k \geqslant M\chi_{E_k}$ und deshalb

$$L \geqslant I_\mu(s_k) \geqslant I_\mu(M\chi_{E_k}) = MI_\mu(\chi_{E_k}) = M\mu(E_k).$$

Für alle k gilt somit

$$\mu(E_k) \leqslant \frac{L}{M}. \tag{$*$}$$

Wegen der Monotonie der Folge (s_k) bildet (E_k) eine monoton steigende Folge zulässiger Mengen, und es gilt

$$N \subset \bigcup_{k\geqslant 0} E_k = \bigcup_{k\geqslant 1} (E_k \setminus E_{k-1}) \cup E_0.$$

Die Mengen E_0 und $E_k \setminus E_{k-1}$ für $k \geqslant 1$ sind sämtlich zulässig und disjunkt, für die Maße gilt deshalb

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(E_k \setminus E_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} (\mu(E_k) - \mu(E_{k-1})) = \mu(E_n) - \mu(E_0).$$

Zusammen mit ($*$) folgt hieraus

$$\sum_{k\geqslant 1} \mu(E_k \setminus E_{k-1}) + \mu(E_0) \leqslant \frac{L}{M}.$$

Stellen wir jetzt noch jeder dieser Mengen als endliche Vereinigung disjunkter Intervalle dar $_9$, so erhalten wir eine abzählbare Familie disjunkter Intervalle, die N überdecken und deren Maßsumme kleiner ist als L/M. Da L fest und M beliebig ist, ist N eine Nullmenge. ⟩⟩⟩⟩⟩

15 **Lemma B** *Sei* (s_k) *eine fallende Folge in* $\mathcal{T}^n$. *Gilt* $s_k \geqslant 0$ *für alle* k *sowie*

$$\lim_{k\to\infty} s_k =_\mu 0,$$

so gilt auch $\lim_{k\to\infty} I_\mu(s_k) = 0$. $\rtimes$

⟨⟨⟨⟨ Sei $s_0 \geqslant s_1 \geqslant s_2 \geqslant .. \geqslant 0$ eine solche Folge. Aufgrund der Monotonie des μ-Integrals $_{12}$ gilt dann auch

$$I_\mu(s_0) \geqslant I_\mu(s_1) \geqslant I_\mu(s_2) \geqslant .. \geqslant 0.$$

Zum Beweis des Lemmas genügt es daher zu zeigen, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n \geqslant 0$ gibt, so dass $I_\mu(s_n) < \varepsilon$.

Aufgrund der Monotonie und Nichtnegativität der Treppenfunktionen s_k sind ihre Träger alle enthalten im Träger

$$Q_0 = \operatorname{supp} s_0.$$

Diese Menge ist zulässig sowie abgeschlossen und beschränkt, also kompakt. Außerdem existiert aufgrund der Monotonie der Folge der punktweise Limes der s_k, und nach Voraussetzung ist $N = \{\lim s_k > 0\}$ eine Nullmenge. Diese ist notwendigerweise in Q_0 enthalten.

Wir können auch noch annehmen, dass jedes s_k ein verträgliches System von Konstanzintervallen besitzt, welches Q_0 überdeckt. Gegebenenfalls ergänzen wir endlich viele geeignete Intervalle und weisen s_k dort den Wert 0 zu.

Sei nun $\varepsilon > 0$. Wir fassen dann alle Konstanzintervalle aller s_k, auf denen diese kleiner als ε sind, zu einer abzählbaren Familie zusammen und bezeichnen sie mit $I_1, I_2, \ldots$ Diese überdecken $Q_0 \setminus N$, da dort $s_k \searrow 0$. Ferner sei $J_1, J_2, ..$ eine Überdeckung von N durch n-Intervalle mit der Eigenschaft, dass

$$\sum_{l\geqslant 1} \mu(J_l) < \varepsilon/2.$$

Aufgrund der Regularität von μ existieren dazu *offene* Intervalle $\tilde{I}_l \supset I_l$ und $\tilde{J}_l \supset J_l$ mit

$$\sum_{l\geqslant 1} \mu(\tilde{I}_l \setminus I_l) + \sum_{l\geqslant 1} \mu(\tilde{J}_l) < \varepsilon.$$

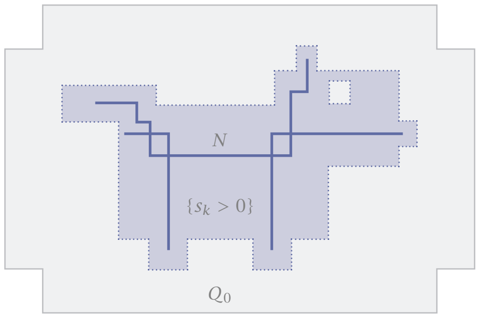
Beide Familien zusammen bilden eine offene Überdeckung der kompakten Menge Q_0. Nach dem Satz von Heine-Borel $_{11.10}$ – der im $\mathbb{R}^n$ genau wie in $\mathbb{R}$ gilt und bewiesen wird $_{\text{A-2}}$ – gibt es auch eine endliche Teilüberdeckung. Es gilt also

$$Q_0 \subset \tilde{I}_1 \cup .. \cup \tilde{I}_r \cup \tilde{J}_1 \cup .. \cup \tilde{J}_s$$

mit einer geeigneten Auswahl und Umnummerierung dieser Intervalle.

Abb 7

Zum Beweis von Lemma B



Zu jedem $\tilde{I}_l$ existiert nun ein Index k_l, so dass $s_{k_l} | I_l < \varepsilon$. Wir setzen $n = \max(k_1, .., k_r)$ und zeigen, dass $I_\mu(s_n)$ klein wird. Sei dazu

$$A = \bigcup_{1 \leqslant l \leqslant r} I_l, \qquad B = \bigcup_{1 \leqslant l \leqslant r} (\tilde{I}_l \setminus I_l) \ \cup \bigcup_{1 \leqslant l \leqslant s} \tilde{J}_l.$$

Dann ist $\chi_A + \chi_B \geqslant 1$ auf Q_0 und deshalb

$$I_\mu(s_n) \leqslant I_\mu((\chi_A + \chi_B)s_n) = I_\mu(\chi_A s_n) + I_\mu(\chi_B s_n).$$

Aufgrund der Wahl von n und der Monotonie der Folge (s_k) ist

$$s_n | I_l \leqslant s_{k_l} | I_l < \varepsilon$$

für jedes l und deshalb auch $s_n | A < \varepsilon$. Also gilt

$$I_\mu(\chi_A s_n) \leqslant \varepsilon I_\mu(\chi_{Q_0}) = \varepsilon \mu(Q_0).$$

Andererseits gilt

$$\mu(B) \leqslant \sum_{1 \leqslant l \leqslant r} \mu(\tilde{I}_l \setminus I_l) + \sum_{1 \leqslant l \leqslant s} \mu(\tilde{J}_l) < \varepsilon$$

und deshalb

$$I_\mu(\chi_B s_n) \leqslant \|s_n\| \, I_\mu(\chi_B) \leqslant \|s_0\| \, \mu(B) \leqslant \varepsilon \, \|s_0\| \, ,$$

wobei $\|\cdot\|$ die Supremumsnorm bezeichnet. Also gilt insgesamt

$$I_\mu(s_n) \leqslant \varepsilon(\mu(Q_0) + \|s_0\|).$$

Da $\mu(Q_0)$ und $\|s_0\|$ unabhängig von n sind, ist die Behauptung bewiesen. ⟫⟫⟫

Bemerkung Lemma A und B werden auch *erster und zweiter Hauptsatz* von Lebesgue genannt. ⊸

16 **Lemma C** *Seien $(s_k), (t_k)$ zwei monoton steigende Folgen in $\mathcal{T}^n$. Gilt*

$$\lim_{k\to\infty} s_k \leqslant_\mu \lim_{k\to\infty} t_k,$$

so gilt auch $\lim_{k\to\infty} I_\mu(s_k) \leqslant \lim_{k\to\infty} I_\mu(t_k)$. $\rtimes$

⟨⟨⟨⟨⟨ Betrachte

$$u_{n,m} := \max(s_n - t_m, 0).$$

Dies sind nichtnegative Treppenfunktionen, die für jedes feste n bezüglich m monoton fallen mit $\lim_{m\to\infty} u_{n,m} =_\mu 0$. Also gilt mit Lemma C [15] auch

$$\lim_{m\to\infty} I_\mu(u_{n,m}) = 0.$$

Wegen $u_{n,m} \geqslant s_n - t_m$ gilt andererseits [12] $I_\mu(u_{n,m}) \geqslant I_\mu(s_n) - I_\mu(t_m)$, also

$$I_\mu(t_m) \geqslant I_\mu(s_n) - I_\mu(u_{n,m})$$

für alle m. Also gilt auch [5.9]

$$\lim_{m\to\infty} I_\mu(t_m) \geqslant I_\mu(s_n) - \lim_{m\to\infty} I_\mu(u_{n,m}) = I_\mu(s_n).$$

Da dies für jedes n gilt, muss auch $\lim_{m\to\infty} I_\mu(t_m) \geqslant \lim_{n\to\infty} I_\mu(s_n)$ gelten. Dies gilt auch für uneigentliche Grenzwerte. ⟩⟩⟩⟩⟩

20.3 Monoton approximierbare Funktionen

Bis jetzt gingen wir genau so vor wie bei der Definition des Cauchyintegrals, abgesehen vom Bezug auf ein allgemeineres Maß. Der entscheidende Unterschied ergibt sich erst jetzt durch die Art, wie das μ-Integral auf eine größere Klasse von Funktionen ausgedehnt wird.

In einem ersten Schritt betrachten wir Funktionen, die sich punktweise durch monoton steigende Folgen von nichtnegativen Treppenfunktionen approximieren lassen. Diese Funktionen bilden allerdings keinen Vektorraum, da die Subtraktion nicht allgemein erklärt ist.

Da wir in diesem Abschnitt nur nichtnegative Funktionen betrachten, benötigen wir nur den Raum $\mathcal{T}^n_+$ der nichtnegativen Treppenfunktionen.

Definition *Eine Funktion $u\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ heißt μ-monoton approximierbar, wenn es eine μ-monoton steigende Folge (s_k) in $\mathcal{T}^n_+$ gibt, so dass*

$$u =_\mu \lim_{k\to\infty} s_k$$

Der Raum dieser Funktionen wird mit $\mathcal{U}^n(\mu)$ bezeichnet. $\rtimes$

⧐ A. Die charakteristische Funktion jedes unbeschränkten Intervalls ist μ-monoton approximierbar A-14 .

B. Die Dirichletfunktion $\delta = \chi_{\mathbb{Q}}$ ist λ-monoton approximierbar. Denn ist $(q_k)_{k\geqslant 1}$ eine Abzählung von $\mathbb{Q}$, so ist

$$s_k = \chi_{\{q_1,..,q_k\}}, \qquad k \geqslant 1,$$

eine monoton steigende Folge in $\mathcal{T}_+^n$, die punktweise gegen δ konvegiert.

C. Eine Funktion $f \in C(\mathbb{R})$ ist λ-monoton approximierbar genau dann, wenn sie nichtnegativ ist A-14 .

D. Auch die Funktion $f \equiv \infty$ ist μ-monoton approximierbar. ⧏

17 **Lemma** *Sind u und v in $\mathcal{U}^n(\mu)$, so sind es auch cu für $c \geqslant 0$ sowie*

$$u + v, \quad uv, \quad \max(u,v), \quad \min(u,v). \quad ⋊$$

⟪⟪⟪ Sind zum Beispiel (s_k) und (t_k) monoton steigende Folgen in $\mathcal{T}_+^n$, so ist es auch $(s_k t_k)$, da nur Produkte nichtnegativer reeller Zahlen auftreten. Und gilt $s_k \to_\mu u$ und $t_k \to_\mu v$, so gilt auch $s_k t_k \to_\mu uv$ in $[0,\infty]$. Entsprechend alles Übrige. ⟫⟫⟫

Definition *Ist $u \in \mathcal{U}^n(\mu)$ der punktweise Grenzwert einer μ-monoton steigenden Folge (s_k) in $\mathcal{T}_+^n$, so heißt*

$$I_\mu(u) \coloneqq \lim_{k\to\infty} I_\mu(s_k)$$

das Lebesgueintegral von f bezüglich μ oder kurz μ-Integral von u. Dieses kann auch den Wert ∞ annehmen. ⋊

⟪⟪⟪ Dieses Integral hängt nicht von der Wahl der Folge ab. Sei (t_k) eine weitere steigende Folge in $\mathcal{T}_+^n$ mit $t_k \to_\mu u$. Dann gilt notwendigerweise

$$\lim s_k =_\mu \lim t_k.$$

Wenden wir Lemma C 16 mit $\leqslant_\mu$ und $\geqslant_\mu$ anstelle von $=_\mu$ an, so erhalten wir

$$\lim I_\mu(s_k) \leqslant \lim I_\mu(t_k), \qquad \lim I_\mu(s_k) \geqslant \lim I_\mu(t_k).$$

Also sind beide Grenzwerte gleich. ⟫⟫⟫

⧐ A. Für eine Treppenfunktion $s \in \mathcal{T}_+^n$ stimmt dieses Integral mit dem zuvor definierten überein, denn die konstante Folge (s) ist eine geeignete approximierende Folge.

B. Eine nichtnegative stetige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist der *gleichmäßige* Limes einer steigenden Folge von Treppenfunktionen in $\mathcal{T}_+^n$ A-13 . Setzen wir also

f außerhalb von $[a,b]$ durch Null zu einer Funktion $f_{[a,b]}$ auf ganz $\mathbb{R}$ fort, so stimmen Cauchy- und Lebesgueintegral überein:

$$\int_a^b f = I_\lambda(f_{[a,b]}).$$

c. Eine nichtnegative stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt immer ein μ-Integral. Dies kann auch den Wert ∞ annehmen und stimmt mit dem uneigentlichen Cauchyintegral von f überein $_{\text{A-10}}$.

d. Für die Dirichletfunktion δ gilt $I_\lambda(\delta) = 0$. ◂

18 **Lemma** *Für $u, v \in \mathcal{U}^n(\mu)$ und $c \geqslant 0$ gilt*

$$I_\mu(cu + v) = \alpha I_\mu(u) + I_\mu(v).$$

Und für $u \leqslant_\mu v$ gilt $I_\mu(u) \leqslant I_\mu(v)$. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Sind (s_k) und (t_k) monoton steigende Folgen von nichtnegativen Treppenfunktionen mit $s_k \to_\mu u$ und $t_k \to_\mu v$, so ist $(cs_k + t_k)$ eine solche Folge mit $cs_k + t_k \to_\mu cu + v$, und es gilt

$$\begin{aligned} I_\mu(cu + v) &= \lim I_\mu(cs_k + t_k) \\ &= \lim\,(I_\mu(cs_k) + I_\mu(t_k)) \\ &= \lim cI_\mu(s_k) + \lim I_\mu(t_k) \\ &= cI_\mu(u) + I_\mu(v). \end{aligned}$$

Entsprechend wird die Monotonie gezeigt $_{\text{A-15}}$. ⟩⟩⟩⟩⟩

▪ Monotone Konvergenz

Der nächste Satz zeigt, dass $\mathcal{U}^n(\mu)$ abgeschlossen ist unter monotoner Grenzwertbildung. Das heißt, der punktweise Grenzwert einer monoton steigenden Folge in $\mathcal{U}^n(\mu)$ gehört ebenfalls zu $\mathcal{U}^n(\mu)$, und dieser Prozess vergrößert den Raum nicht. Außerdem vertauschen Integral und Grenzübergang.

19 **Satz von der monotonen Konvergenz** *Sei (u_k) eine μ-monoton steigende Folge in $\mathcal{U}^n(\mu)$. Dann gilt*

$$u =_\mu \lim u_k \in \mathcal{U}^n(\mu), \qquad I_\mu(u) = \lim I_\mu(u_k). \quad ⋊$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Zu jedem u_k existiert eine steigende Folge $(s_{k,l})_{l\geqslant 1}$ in $\mathcal{T}^n_+$ mit

$$s_{k,1} \leqslant s_{k,2} \leqslant s_{k,3} \leqslant .. \leqslant s_{k,l} \nearrow_\mu u_k.$$

Dabei können wir annehmen, dass die punktweise Konvergenz für alle k außerhalb einer gemeinsamen Nullmenge N stattfindet $_6$. Dann sind die Funktionen

$$t_m \coloneqq \max\{s_{k,l} : 1 \leqslant k, l \leqslant m\}, \qquad m \geqslant 1,$$

als Maximum über jeweils endlich viele nichtnegative Treppenfunktionen ebenfalls nichtnegative Treppenfunktionen [11]. Diese bilden ebenfalls eine monoton steigende Folge, wobei wegen $s_{k,l} \leqslant_\mu u_k \leqslant_\mu u_l$ für $k \leqslant l$ außerdem

$$t_m \leqslant_\mu u_m \leqslant_\mu u, \qquad m \geqslant 1.$$

Es gilt auch

$$t_m \nearrow_\mu u.$$

Denn gilt dies in einem Punkt p *nicht*, so ist $t_m(p) \leqslant \lim t_m(p) < u(p)$ für alle m. Dasselbe gilt dann auch für alle $s_{k,l}(p)$. Folglich gehört p zu der Nullmenge N, auf der die Treppenfunktionen nicht gegen u konvergieren.

Somit ist u μ-fast überall der Grenzwert der steigenden Folge (t_m) in $\mathcal{T}_+^n$ und damit ebenfalls in $\mathcal{U}^n(\mu)$. Aus der Definition des Integrals folgt außerdem

$$\lim I_\mu(t_m) = I_\mu(u).$$

Wegen $t_m \leqslant_\mu u_m \leqslant_\mu u$ ist andererseits [18]

$$I_\mu(t_m) \leqslant I_\mu(u_m) \leqslant I_\mu(u).$$

Also gilt auch $\lim I_\mu(u_m) = I_\mu(u)$.

20 *Ein Gegenbeispiel* Die Treppenfunktionen

$$\sigma_k = k^{-1}\chi_{[0,k]}, \qquad k \geqslant 1,$$

konvergieren in $\mathcal{U}^n(\mu)$ gleichmäßig gegen die Nullfunktion, aber $I_\mu(\sigma_k) = 1$ für alle k. Integral und Limes vertauschen bei nicht-monotoner Konvergenz im Allgemeinen also nicht, selbst bei gleichmäßiger Konvergenz.

20.4 Messbare und summierbare Funktionen

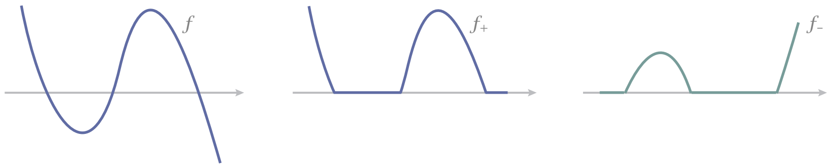
Wir betrachten nun den Raum aller Funktionen, die sich als *Differenz* von monoton approximierbaren Funktionen darstellen lassen. Um undefinierte Ausdrücke zu vermeiden, beschränken wir uns dabei auf Funktionen in $\mathcal{U}^n(\mu)$, die μ-fast überall endlich sind.

Definition *Eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt μ-messbar, wenn sie eine wohldefinierte Darstellung*

$$f =_\mu u_1 - u_2, \qquad u_1, u_2 \in \mathcal{U}^n(\mu),$$

besitzt, so dass u_1 und u_2 μ-fast überall endlich sind. Der Raum aller μ-messbaren Funktionen wird mit $\mathcal{M}^n(\mu)$ bezeichnet.

Abb 8 Positivteil und Negativteil einer Funktion



Eine Funktion $f \in \mathcal{U}^n(\mu)$ ist μ-messbar dann und nur dann, wenn $f <_\mu \infty$. Somit ist $\mathcal{U}^n(\mu)$ nicht ganz in $\mathcal{M}^n(\mu)$ enthalten.

21 **Satz** *Der Raum $\mathcal{M}^n(\mu)$ ist eine Algebra.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Seien $f =_\mu u_1 - u_2$ und $g =_\mu v_1 - v_2$ wohldefinierte Darstellungen aus μ-fast überall endlichen $\mathcal{U}^n(\mu)$-Funktionen. Da Summen und Produkte aus diesen wieder μ-monoton approximierbar 17 und μ-fast überall endlich sind, sind

$$\begin{aligned} f + g &=_\mu (u_1 + v_1) - (u_2 + v_2), \\ f - g &=_\mu (u_1 + v_2) - (u_2 + v_1), \\ fg &=_\mu (u_1 v_1 + u_2 v_2) - (u_1 v_2 + u_2 v_1) \end{aligned}$$

wohldefinierte Darstellungen von $f \pm g$ und fg. Also sind diese ebenfalls μ-messbar. Dasselbe gilt für skalare Vielfache von f, wie man leicht sieht. Also ist $\mathcal{M}^n(\mu)$ eine Algebra. ⟩⟩⟩⟩⟩

Für eine beliebige reellwertige Funktion f heißen

$$f_+ \coloneqq \max(f, 0), \qquad f_- \coloneqq \max(-f, 0)$$

der *Positivteil* respektive *Negativteil* dieser Funktion. Auch der Negativteil einer Funktion ist *nichtnegativ*, und es gelten unter anderem folgende

22 **Identitäten** *Für beliebige reellwertige Funktionen f und g gilt*

$$f = f_+ - f_-, \qquad |f| = f_+ + f_-$$

sowie

$$\begin{aligned} \max(f, g) &= g + (f - g)_+ = f + (f - g)_- \,, \\ \min(f, g) &= g - (f - g)_- = f - (f - g)_+ \,. \end{aligned}$$ ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Dies verifiziert man mühelos punktweise. ⟩⟩⟩⟩⟩

23 **Satz** *Sind f und g μ-messbar, so sind es auch*

$$f_+, \quad f_-, \quad |f|, \quad \max(f, g), \quad \min(f, g).$$ ⋊

⟪⟪ Sei $f = u_1 - u_2$ eine wohldefinierte Darstellung. Da $\max(u_1, u_2)$ ebenfalls μ-fast überall endlich ist und zu $\mathcal{U}^n(\mu)$ gehört 17, sind auch 22

$$f_+ = \max(u_1, u_2) - u_2, \qquad f_- = \max(u_1, u_2) - u_1$$

wohldefinierte Darstellungen. Also sind diese Funktionen μ-messbar. Damit sind dann auch 21 $|f| = f_+ + f_-$ sowie mit den vorangehenden Identitäten 22 $\max(f, g)$ und $\min(f, g)$ μ-messbar. ⟫⟫

Bemerkung Im Allgemeinen sind f_+ oder f_- jedoch *nicht* monoton approximierbar. Dies gilt zum Beispiel für die charakteristischen Funktionen von Cantormengen mit positivem Maß A-19. ⊸

▪ Integral

Das Integral einer messbaren Funktion $f = u_1 - u_2$ ist genau dann als Differenz der Integrale von u_1 und u_2 auf der *erweiterten* Zahlengeraden wohldefiniert, wenn wenigstens eines von ihnen endlich ist. Das Integral selbst kann unbeschränkt sein.

Definition *Eine Funktion $f \in \mathcal{M}^n(\mu)$ besitzt eine zulässige Darstellung, wenn es eine wohldefinierte Darstellung*

$$f =_\mu u_1 - u_2, \qquad u_1, u_2 \in \mathcal{U}^n(\mu),$$

gibt, wo mindestens eine Funktion ein endliches μ-Integral besitzt. In diesem Fall heißt f μ-summierbar, und

$$I_\mu(f) := I_\mu(u_1) - I_\mu(u_2)$$

das Integral von f bezüglich μ oder kurz das μ-Integral von f. Der Raum der μ-summierbaren Funktionen wird mit $\mathcal{M}_s^n(\mu)$ bezeichnet. ⋊

⟪⟪ Das Integral ist unabhängig von der zulässigen Darstellung. Denn ist $f =_\mu v_1 - v_2$ eine zweite zulässige Darstellung von f, so ist $u_1 + v_2 =_\mu u_2 + v_1$ und damit 18

$$I_\mu(u_1) + I_\mu(v_2) = I_\mu(u_1 + v_2) = I_\mu(u_2 + v_1) = I_\mu(u_2) + I_\mu(v_1).$$

Ist nun beispielsweise $I_\mu(u_1) = \infty$, so ist notwendigerweise $I_\mu(u_2) < \infty$. Dann muss aber auch $I_\mu(v_1) = \infty$ und $I_\mu(v_2) < \infty$ gelten, und damit

$$I_\mu(u_1) - I_\mu(u_2) = I_\mu(v_1) - I_\mu(v_2)$$

auf der erweiterten Zahlengeraden. Dasselbe gilt in den anderen Fällen. Also ergeben beide Darstellungen dasselbe Integral $I_\mu(f)$. Für $f \in \mathcal{U}^n(\mu) \cap \mathcal{M}^n(\mu)$

stimmt dieses Integral mit der vorangehenden Definition überein, so dass es gerechtfertigt ist, dieselbe Notation zu verwenden. »»»

24 **Satz** *Seien f und g μ-summierbar. Gilt $f \leqslant_\mu g$, so gilt auch $I_\mu(f) \leqslant I_\mu(g)$.* ⋊

«««« Sind $f =_\mu u_1 - u_2$ und $g =_\mu v_1 - v_2$ zulässige Darstellungen, so ist $u_1 + v_2 \leqslant_\mu u_2 + v_1$ in $\mathfrak{U}^n(\mu)$ und damit 18

$$I_\mu(u_1) + I_\mu(v_2) = I_\mu(u_1 + v_2) \leqslant I_\mu(u_2 + v_1) = I_\mu(u_2) + I_\mu(v_1).$$

Mit derselben Argumentation wie im Beweis zuvor gilt auf der erweiterten Zahlengeraden dann auch

$$I_\mu(f) = I_\mu(u_1) - I_\mu(u_2) \leqslant I_\mu(v_1) - I_\mu(v_2) = I_\mu(g).$$

Das ist die Behauptung. »»»

25 **Satz** *Ist f μ-summierbar, so auch f_+, f_- und $|f|$, und es gilt*

$$I_\mu(f) = I_\mu(f_+) - I_\mu(f_-), \qquad |I_\mu(f)| \leqslant I_\mu(|f|). \quad ⋊$$

«««« Sei $f = u_1 - u_2$ eine zulässig Darstellung. Ist zum Beispiel $I_\mu(u_2) < \infty$, so ist auch $I_\mu(\min(u_1, u_2)) < \infty$, und 22

$$f_+ = \max(u_1, u_2) - u_2, \qquad f_- = u_2 - \min(u_1, u_2)$$

sind zulässige Darstellungen. Also sind f_+ und f_- μ-summierbar. Mit der ebenfalls zulässigen Darstellung $f = f_+ - f_- = (\max(u_1, u_2) + \min(u_1, u_2)) - 2u_2$ folgt

$$\begin{aligned} I_\mu(f) &= I_\mu(\max(u_1, u_2) + \min(u_1, u_2)) - I_\mu(2u_2) \\ &= I_\mu(\max(u_1, u_2)) - I_\mu(u_2) + I_\mu(\min(u_1, u_2)) - I_\mu(u_2) \\ &= I_\mu(f_+) - I_\mu(f_-). \end{aligned}$$

Ferner ist $|f| = f_+ + f_- = \max(u_1, u_2) - \min(u_1, u_2)$ eine zulässige Darstellung, somit auch $|f|$ μ-summierbar, und mit der eben bewiesenen Identität gilt

$$\begin{aligned} |I_\mu(f)| &= |I_\mu(f_+) - I_\mu(f_-)| \\ &\leqslant I_\mu(f_+) + I_\mu(f_-) \\ &= I_\mu(f_+ + f_-) = I_\mu(|f|). \end{aligned}$$

Der Fall $I_\mu(u_1) < \infty$ wird analog behandelt, oder man betrachtet $-f$. »»»

Der Satz von Beppo Levi

Der Satz von der monotonen Konvergenz 19 gilt auch für μ-summierbare Funktionen. Er erfordert aber einen eigenen Beweis, denn die Klasse der nichtnegativen μ-summierbaren Funktionen ist größer als die der monoton approximierbaren Funktionen A-19.

26 **Satz von Beppo Levi** *Sei (f_k) eine μ-monoton steigende Folge nichtnegativer Funktionen in $\mathcal{M}_s^n(\mu)$. Gilt*

$$f =_\mu \lim f_k <_\mu \infty,$$

so gilt auch

$$f \in \mathcal{M}_s^n(\mu), \qquad I_\mu(f) = \lim I_\mu(f_k).$$

⟪⟪ Ohne Beschränkung der Gemeinheit sei $f_0 \equiv 0$. Andernfalls fügen wir die Nullfunktion am Anfang der Folge hinzu.

Wir nehmen zunächst an, dass $I_\mu(f_k) < \infty$ für alle k. Somit existieren zulässige Darstellungen $f_k = f_{k,1} - f_{k,2}$, wo beide Funktionen ein endliches Integral besitzen. Somit existiert auch eine entsprechende zulässige Darstellung $f_k - f_{k-1} = u_k - v_k$ mit endlichen Integralen. Da diese wegen der Monotonie der Folge (f_k) nichtnegativ sind, können wir diese auch noch so wählen, dass A-12

$$I_\mu(v_k) < 2^{-k}.$$

Schreibe nun

$$f_k = \sum_{i=1}^{k} (f_i - f_{i-1}) = \sum_{i=1}^{k} (u_i - v_i) = g_k - h_k$$

mit den Funktionen

$$g_k = \sum_{i=1}^{k} u_i, \qquad h_k = \sum_{i=1}^{k} v_i.$$

Diese bilden monoton steigende Folgen in $\mathcal{U}^n(\mu)$. Aufgrund des Satzes von der monotonen Konvergenz 19 gilt also

$$g_k \nearrow_\mu g \in \mathcal{U}^n(\mu), \qquad h_k \nearrow_\mu h \in \mathcal{U}^n(\mu).$$

Für alle k ist dabei

$$I_\mu(h_k) = \sum_{i=1}^{k} I_\mu(v_i) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1.$$

Also ist 19 $I_\mu(h) = \lim I_\mu(h_k) \leqslant 1$, und damit 14 $h <_\mu \infty$. Wegen $f <_\mu \infty$ gilt dann auch $g_k = f_k + h_k \nearrow_\mu g <_\mu \infty$. Also hat

$$f = \lim f_k = \lim\,(g_k - h_k) = \lim g_k - \lim h_k = g - h$$

eine wohldefinierte und auch zulässige Darstellung, und es gilt

$$\begin{aligned} I_\mu(f) = I_\mu(g) - I_\mu(h) &= \lim I_\mu(g_k) - \lim I_\mu(h_k) \\ &= \lim\,(I_\mu(g_k) - I_\mu(h_k)) \\ &= \lim I_\mu(g_k - h_k) \\ &= \lim I_\mu(f_k). \end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt für den Fall, dass alle $I_\mu(f_k)$ endlich sind. — Ist dies nicht der Fall, so betrachten wir hilfsweise die abgeschnittenen Funktionen

$$\hat{f}_k = \min(f_k, k\chi_{[-k,k]^n}), \qquad k \geqslant 1.$$

Diese bilden ebenfalls eine monoton steigende Folge A-11, auf die wir das vorangehende Ergebnis anwenden können. Mit

$$\lim_{k\to\infty} \hat{f}_k = \lim_{k\to\infty} f_k, \qquad I_\mu(\hat{f}_k) \leqslant I_\mu(f_k)$$

folgt dann die Behauptung auch in diesem Fall. ⟫⟫⟫

20.5 Integrierbare Funktionen

Definition *Eine Funktion $f \in \mathcal{M}_s^n(\mu)$ heißt μ-integrierbar, wenn ihr μ-Integral endlich ist. Der Raum aller μ-integrierbaren Funktionen wird mit $\mathcal{L}^n(\mu)$ bezeichnet.* ⋊

27 **Satz** *Das Lebesgueintegral definiert ein lineares Funktional*

$$I_\mu : \mathcal{L}^n(\mu) \to \mathbb{R}. \qquad ⋊$$

⟪⟪⟪ Wir zeigen die Additivität. Funktionen $f, g \in \mathcal{L}^n(\mu)$ besitzen zulässige Darstellungen $f = u_1 - u_2$ und $g = v_1 - v_2$ mit integrierbaren Funktionen in $\mathcal{U}^n(\mu)$. Dann sind auch $u_1 + v_1$ und $u_2 + v_2$ integrierbare $\mathcal{U}^n(\mu)$-Funktionen 25 und damit

$$f - g = (u_1 + v_2) - (u_2 + v_1)$$

eine zulässige Darstellung mit integrierbaren Funktionen. Weiter folgt

$$\begin{aligned} I_\mu(f-g) &= I_\mu(u_1+v_2) - I_\mu(u_2+v_1) \\ &= I_\mu(u_1) - I_\mu(u_2) - I_\mu(v_1) + I_\mu(v_2) \\ &= I_\mu(f) - I_\mu(g). \end{aligned}$$

Alles andere wird entsprechend gezeigt. ⟫⟫⟫

Wir kommen nun zum wichtigsten Satz der Lebesguetheorie. Dieser betrifft die Vertauschbarkeit von Integration und Grenzübergang unter sehr allgemeinen Bedingungen. Insbesondere betrachten wir nun beliebige Folgen, nicht nur monotone Folgen.

Von nun an schreiben wir

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \,\mathrm{d}\mu := I_\mu(f)$$

für Funktionen in $\mathcal{L}^n(\mu)$. Zunächst noch ein Spezialfall.

28 **Lemma von Fatou** *Sei (f_k) eine fast überall konvergente Folge in $\mathcal{L}^n(\mu)$. Gilt $f_k \geqslant_\mu 0$ für alle k sowie*

$$\sup \int_{\mathbb{R}^n} f_k \,\mathrm{d}\mu < \infty,$$

so gilt auch $f =_\mu \lim f_k \in \mathcal{L}^n(\mu)$, und

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \,\mathrm{d}\mu \leqslant \liminf \int_{\mathbb{R}^n} f_k \,\mathrm{d}\mu. \qquad \rtimes$$

⟪⟪⟪ Betrachte die Funktionen

$$g_{k,l} := \inf(f_k, .., f_l), \qquad k \leqslant l.$$

Diese sind sämtlich messbar $_{23}$, nichtnegativ, und bilden für jedes k eine monoton fallende Folge bezüglich l. Auf die monoton steigende Folge $(f_k - g_{k,l})_{l \geqslant k}$ können wir dann den Satz von Beppo Levi anwenden $_{\text{A-22}}$ und schließen, dass

$$g_k := \inf(f_k, f_{k+1}, ..) = \lim_{l\to\infty} g_{k,l}$$

für jedes k integrierbar ist. Wegen $I_\mu(g_k) \leqslant I_\mu(f_l)$ für alle $l \geqslant k$ gilt außerdem

$$I_\mu(g_k) \leqslant \inf_{l \geqslant k} I_\mu(f_l).$$

Also gilt erst Recht $\sup I_\mu(g_k) \leqslant \sup I_\mu(f_l) < \infty$. Da die Folge (g_k) monoton steigt, können wir den Satz von Beppo Levi nochmals anwenden und finden, dass $g =_\mu \lim g_k$ ebenfalls integrierbar ist, mit

$$I_\mu(g) = \lim I_\mu(g_k) \leqslant \lim_k \inf_{l \geqslant k} I_\mu(f_l) = \liminf I_\mu(f_k).$$

Da die Folge (f_k) nach Voraussetzung μ-fast überall konvergiert, ist schließlich $g =_\mu \lim g_k = \lim f_k =_\mu f$, und das Lemma ist bewiesen. 》》》

▷ A. Das bereits erwähnte Beispiel 20 $\sigma_k = k^{-1}\chi_{[0,k]}$ zeigt, dass im Lemma von Fatou strikte Ungleichung eintreten kann, auch bei gleichmäßiger Konvergenz. Denn $\sigma_k \rightrightarrows 0$, aber

$$0 = \int_{\mathbb{R}^n} \lim \sigma_k \,\mathrm{d}\mu < \lim \int_{\mathbb{R}^n} \sigma_k \,\mathrm{d}\mu = 1.$$

B. Die Funktionen $\tau_k = -\sigma_k$ konvergieren ebenfalls gleichmäßig gegen 0. Sie sind aber *negativ*, und es gilt

$$-1 = \lim \int_{\mathbb{R}^n} \tau_k \,\mathrm{d}\mu < \int_{\mathbb{R}^n} \lim \tau_k \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Also gilt das Lemma von Fatou für solche Funktionen nicht. ◁

29 **Korollar** *Sei $f \in \mathcal{M}_s^n(\mu)$ und $f \geqslant_\mu 0$. Dann gilt*

$$f =_\mu 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_{\mathbb{R}^n} f \,\mathrm{d}\mu = 0. \qquad ⋊$$

《《《 $\Rightarrow$ Dies folgt mit $f = u - v$ und $u =_\mu v$, also $I_\mu(u) = I_\mu(v)$ 18.

$\Leftarrow$ Sei $f_k \coloneqq kf$ für $k \geqslant 1$. Dann ist (f_k) eine punktweise konvergente Folge in $\mathcal{L}^n(\mu)$, und $f_k \geqslant_\mu 0$ für alle k. Da außerdem

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_k \,\mathrm{d}\mu = k\int_{\mathbb{R}^n} f \,\mathrm{d}\mu = 0, \qquad k \geqslant 1,$$

ist das Lemma von Fatou anwendbar. Also gehört der punktweise Limes der (f_k) ebenfalls zu $\mathcal{L}^n(\mu)$. Das ist aber nur möglich, wenn $f =_\mu 0$. 》》》

Es folgt der zentrale Satz der gesamten Integrationstheorie. Er wird auch als *Satz von der dominierten Konvergenz* bezeichnet.

30 **Satz von Lebesgue** *Sei (f_k) eine fast überall konvergente Folge in $\mathcal{L}^n(\mu)$. Gibt es eine μ-integrierbare Funktion g, so dass*

$$|f_k| \leqslant_\mu g, \qquad k \geqslant 1,$$

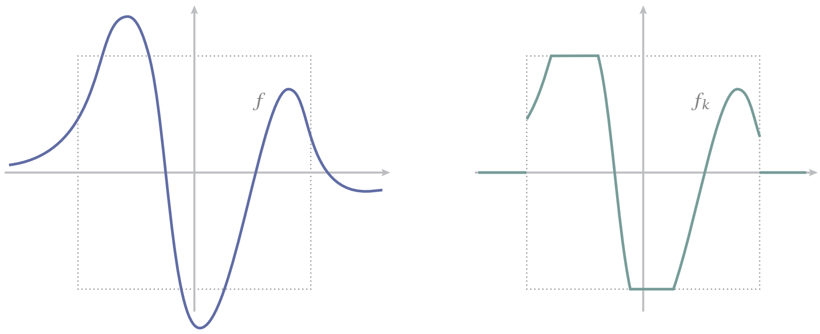
so ist auch $f =_\mu \lim f_k$ integrierbar, und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k \,\mathrm{d}\mu. \qquad ⋊$$

《《《 Die Funktionen $g + f_k$ sind sämtlich integrierbar, nichtnegativ, und konvergieren μ-fast überall gegen $g + f$. Außerdem gilt

$$I_\mu(g + f_k) \leqslant I_\mu(g) + I_\mu(|f_k|) \leqslant I_\mu(g) + I_\mu(g) < \infty$$

Abb 9 Funktion und abgeschnittene Funktion



für alle k. Mit Fatou ist also $g + f$ integrierbar und

$$\begin{aligned} I_\mu(g+f) &= I_\mu(g + \lim f_k) \\ &\leqslant \liminf I_\mu(g+f_k) \\ &= I_\mu(g) + \liminf I_\mu(f_k). \end{aligned}$$

Da g integrierbar ist, ist auch f integrierbar, und es gilt $I_\mu(f) \leqslant \liminf I_\mu(f_k)$.

Argumentiert man entsprechend für $g - f_k \geqslant 0$, so folgt

$$\begin{aligned} I_\mu(g-f) &= I_\mu(g - \lim f_k) \\ &\leqslant \liminf I_\mu(g-f_k) \\ &= I_\mu(g) - \limsup I_\mu(f_k), \end{aligned}$$

und man erhält $\limsup I_\mu(f_k) \leqslant I_\mu(f)$. Insgesamt gilt also

$$\limsup I_\mu(f_k) \leqslant I_\mu(f) \leqslant \liminf I_\mu(f_k).$$

Das bedeutet aber, dass die Folge $I_\mu(f_k)$ konvergiert mit Grenzwert $I_\mu(f)$. ⟫⟫⟫

▷ Das Beispiel der Folge (σ_n) zur monotonen Konvergenz 20 zeigt auch, dass die Existenz einer integrierbaren Majorante unverzichtbar ist. Die kleinstmögliche Majorante für alle Funktionen $\sigma_n = n^{-1}\chi_{(0,n]}$ mit $n \geqslant 1$ ist

$$g = \sum_{n \geqslant 1} n^{-1}\chi_{(n-1,n]}.$$

Ihr λ-Integral ist die harmonische Reihe. Also ist g nicht λ-integrierbar. Und tatsächlich gilt ja auch der Satz von Lebesgue nicht. ◁

Eine erste Anwendung des Satzes von Lebesgue ist folgendes

31 **Majorantenkriterium** *Ist f messbar, g integrierbar und $|f| \leqslant_\mu g$, so ist auch f integrierbar, und es gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f| \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} g \,\mathrm{d}\mu. \quad ⋊$$

⟪⟪ Betrachte die abgeschnittenen Funktionen

$$f_k \coloneqq \chi_{[-k,k]^n} \max(\min(f,k),-k), \qquad k \geqslant 1.$$

Diese sind messbar und beschränkt mit beschränktem Träger, also integrierbar. Wegen $|f_k| \leqslant_\mu g$ für alle k und $f_k \to f$ punktweise ist also f aufgrund des Satzes von Lebesgue integrierbar, und es ist

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f| \,\mathrm{d}\mu = \lim \int_{\mathbb{R}^n} |f_k| \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} g \,\mathrm{d}\mu$$

aufgrund der Monotonie des Integrals. ⟫⟫

20.6 Messbare Mengen

Wir dehnen das Maß μ noch über $\mathcal{Z}^n$ auf eine wesentlich größere Familie von Mengen aus.

Definition *Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt μ-messbar, wenn ihre charakteristische Funktion μ-messbar ist. Ihr Maß ist dann*

$$\mu(A) \coloneqq I_\mu(\chi_A),$$

wobei auch der Wert ∞ zulässig ist. Die Familie aller dieser Mengen wird mit $\mathcal{A}^n(\mu)$ bezeichnet. ⋊

⊳ A. Jedes Intervall und jede zulässige Menge ist μ-messbar, und ihr Maß stimmt mit dem bereits definierten Maß überein.

B. $\mathbb{Q}^n$ und $\mathbb{R}^n$ sind μ-messbar, und im Fall des Volumenmaßes ist

$$\lambda_n(\mathbb{Q}^n) = 0, \qquad \lambda_n(\mathbb{R}^n) = \infty. \quad ⊲$$

32 **Lemma** *Ist (A_k) eine monoton steigende Folge μ-messbarer Mengen, so ist auch $A = \bigcup_k A_k$ μ-messbar, und es gilt*

$$\mu(A) = \lim \mu(A_k). \quad ⋊$$

⟪⟪ Die charakteristischen Funktionen χ_{A_k} bilden eine monoton steigende Folge in $\mathcal{M}_s^n(\mu)$ mit nichtnegativen Integralen und

$$\chi_{A_k} \nearrow \chi_A < \infty.$$

Der Satz von Beppo Levi 26 ist also anwendbar. Somit ist $\chi_A \in \mathcal{M}_s^n(\mu)$ und

$$\mu(A) = I_\mu(\chi_A) = \lim I_\mu(\chi_{A_k}) = \lim \mu(A_k). \qquad ⟫⟫$$

33 **Satz** *Die Familie $\mathcal{A}^n(\mu)$ aller μ-messbaren Mengen bildet eine σ-Algebra: sie enthält die leere Menge und ist abgeschlossen unter abzählbaren Vereinigungen und abzählbaren Durchschnitten sowie Komplementbildung.* ⋊

⟪⟪ Die Vereinigung zweier messbarer Mengen ist wieder messbar, denn $\chi_{A\cup B} = \sup(\chi_A, \chi_B)$ 21 . Dasselbe gilt dann für Vereinigungen endlich vieler messbarer Mengen. Die Vereinigung abzählbar vieler messbarer Mengen A_k ist dann darstellbar als Vereinigung einer steigenden Folge messbarer Mengen,

$$A = \bigcup_k A_k = \lim_{n\to\infty} \bigcup_{k\leqslant n} A_k,$$

und damit ebenfalls messbar 32 .

Das Komplement eines messbaren Menge A ist messbar, denn $\mathbb{R}^n$ ist messbar, und es gilt $\chi_{A^c} = 1 - \chi_A$.

Die Messbarkeit abzählbar vieler Durchschnitte folgt schließlich mit den bisherigen Ergebnissen und der Regel von de Morgan,

$$\bigcap_k A_k = \Big(\bigcup_k A_k^c\Big)^c. \qquad ⟫⟫$$

Da sich offene Mengen als abzählbare Vereinigung von n-Intervallen schreiben lassen und deren Komplemente die abgeschlossenen Mengen bilden, erhalten wir folgendes

34 **Korollar** *Offene und abgeschlossene Mengen sind μ-messbar.* ⋊

⊳ Der Durchschnitt abzählbar vieler offener Mengen, genannt *G_δ-Mengen*, ist μ-messbar. Dasselbe gilt für die Vereinigung abzählbar vieler abgeschlossener Mengen, genannt *F_σ-Mengen*. ◅

Bemerkung Die Familie aller μ-messbaren Mengen $\mathcal{A}^n(\mu)$ enthält damit auch die *Borelalgebra* $\mathcal{B}^n$, welche definiert ist als die kleinste σ-Algebra, die alle offenen und abgeschlossenen Mengen enthält. Sie hängt also nicht vom Maß, sondern nur von der Topologie ab. Es gilt sogar

$$\mathcal{B}^n(\mu) \subsetneq \mathcal{A}^n(\mu) \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n),$$

worauf wir hier allerdings nicht eingehen werden. ⊸

Integrale über messbare Mengen

Alle Integrale erstreckten sich bisher über den Gesamtraum $\mathbb{R}^n$. Integrale über messbare Teilmengen werden hierauf zurückgeführt, indem man die betreffende Funktion durch 0 auf deren Komplement fortsetzt.

Ist also $A \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige Menge und $f\colon A \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion, so definieren wir deren Fortsetzung auf den Gesamtraum $\mathbb{R}^n$ als

$$f_A \coloneqq \begin{cases} f & \text{auf } A, \\ 0 & \text{auf } A^c. \end{cases}$$

Für eine auf ganz $\mathbb{R}^n$ erklärte Funktion f gilt also

$$f_A = f\chi_A.$$

Die Funktion f heißt dann *μ-messbar auf A*, wenn sowohl A als auch f_A μ-messbar sind. Ihr Integral über A ist dann definiert als

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu \coloneqq \int_{\mathbb{R}^n} f_A \,\mathrm{d}\mu.$$

Man überlegt sich, dass alle bisherigen Sätzen entsprechend auch hierfür gelten.

20.7 Parameterabhängige Integrale

Eine typische, oft benötigte Anwendung des Satzes von Lebesgue sind parameterabhängige Integrale. Sei dazu I ein nichtentartetes Intervall und

$$f\colon I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (t, x) \mapsto f(t, x)$$

eine Funktion mit der Eigenschaft, dass für jedes $t \in I$ die *partielle Funktion*

$$f_t\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f_t(x) = f(t, x)$$

messbar ist. Der Parameter ist also t, und f_t bezeichnet hier nicht die partielle Ableitung nach t, sondern die Funktion zum fixierten Parameterwert t.

35 **Satz** *Für ein $a \in I$ gelte*

$$f_a =_\mu \lim_{t \to a} f_t.$$

Gibt es eine integrierbare Funktion g mit $|f_t| \leqslant g$ für alle $t \in I$, so sind auch alle f_t integrierbar, und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_a \,\mathrm{d}\mu = \lim_{t \to a} \int_{\mathbb{R}^n} f_t \,\mathrm{d}\mu. \quad \rtimes$$

⟪⟪⟪ Die Integrierbarkeit aller f_t folgt aus der Existenz einer integrierbaren Majorante g 31. Ist (t_n) eine beliebige Folge in I mit $t_n \to a$, so gilt

$$f_a =_\mu \lim f_{t_n}, \qquad |f_{t_n}| \leqslant g.$$

Mit dem Satz von Lebesgue 30 folgt daher

$$I_\mu(f_a) = I_\mu(\lim f_{t_n}) = \lim I_\mu(f_{t_n}).$$

Da dies für jede solche Folge (t_n) gilt, folgt hieraus die Behauptung 7.3. ⟫⟫⟫

36 **Korollar** *Sei $f_x = f(\cdot, x)$ für fast jedes $x \in \mathbb{R}^n$ stetig auf I. Gibt es eine integrierbare Funktion g mit $|f_t| \leqslant g$ für alle $t \in I$, so ist auch*

$$F: I \to \mathbb{R}, \quad F(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f_t \,\mathrm{d}\mu$$

stetig auf I. ⋊

Wir betrachten nun die Differenziation solcher Parameterintegrale.

37 **Satz** *Es sei f_a für ein $a \in I$ integrierbar, und die partielle Ableitung $f' = \partial_t f$ existiere in jedem Punkt von $I \times \mathbb{R}^n$. Gibt es eine integrierbare Funktion g mit $|f_t'| \leqslant g$ für alle $t \in I$, so ist auch*

$$F: I \to \mathbb{R}, \quad F(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f_t \,\mathrm{d}\mu$$

auf I differenzierbar, und es gilt

$$F'(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f_t' \,\mathrm{d}\mu, \qquad t \in I. \quad ⋊$$

⟪⟪⟪ Aus dem Mittelwertsatz der Differenzialrechnung 8.11 und der Schranke für f' folgt für beliebige $t_n \neq t$ in I die Abschätzung

$$\left| \frac{f(t_n, x) - f(t, x)}{t_n - t} \right| \leqslant \sup_{s \in I} |f'(s, x)| \leqslant g(x).$$

Insbesondere ist

$$|f(t, x)| \leqslant |f(a, x)| + |t - a|\, g(x),$$

und damit f_t integrierbar für *alle* $t \in I$. Konvergiert nun (t_n) gegen t, so folgt aus der gleichmäßigen Schranke für die Differenzenquotienten und dem Satz von der majorisierten Konvergenz

$$\begin{aligned}\lim \frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} &= \lim \int \frac{f(t_n, x) - f(t, x)}{t_n - t} \,\mathrm{d}\mu \\ &= \int \lim \frac{f(t_n, x) - f(t, x)}{t_n - t} \,\mathrm{d}\mu \\ &= \int f_t' \,\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$