

21

Integration im \mathbb{R}^n

Für Regelfunktionen stimmt das Lebesgueintegral mit dem Regelintegral überein. Im eindimensionalen Fall stehen uns daher die vertrauten Techniken zur Verfügung, um Integrale zu berechnen. Doch wie geht man in höheren Dimensionen vor?

Im Wesentlichen gibt es zwei Möglichkeiten. Die erste ist als Satz von Fubini bekannt. Er erlaubt es unter recht allgemeinen Voraussetzungen, ein n -dimensionales Integral als Hintereinanderausführung niederdimensionaler Integrale darzustellen und so im Prinzip auf n eindimensionale Integrale zurückzuführen.

Die zweite besteht darin, ein Integral durch Einführung geeigneter Koordinaten – wie zum Beispiel Polar- oder Kugelkoordinaten – zu vereinfachen. Die hierfür nötige n -dimensionale Transformationsformel ergibt sich allerdings, anders als im eindimensionalen Fall, nicht direkt aus einer Kettenregel. Vielmehr ist einiges Geschick erforderlich, um diese mit dem Satz von Fubini und partieller Integration herzuleiten.

Es gibt noch eine dritte Möglichkeit – die als Satz von Stokes bekannte Verallgemeinerung des Fundamentalsatzes auf höhere Dimensionen. Diesen betrachten wir erst im nächsten Kapitel, da er einigen begrifflichen Aufwand erfordert.

21.1

Der Satz von Fubini

Wir betrachten das Problem, ein n -dimensionales Integral als Folge 1-dimensionaler Integrale darzustellen, die wir – zumindest im Prinzip – berechnen können. Die Grundidee ist das *Prinzip des Cavalieri*. Sei D eine abgeschlossene Menge in der (u, v) -Ebene. Jeder *u -Schnitt*

$$D_u = \{v : (u, v) \in D\}$$

ist eine abgeschlossene 1-dimensionale Menge mit 1-dimensionalem Maß

$$L(D_u) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{D_u} d\lambda_1.$$

Der Flächeninhalt von D sollte sich dann als 1-dimensionales Integral über diese Schnittlängen darstellen lassen, also

$$\lambda_2(D) = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_D d\lambda_2 = \int_{\mathbb{R}} L(D_u) d\lambda_1 = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_D d\lambda_1 \right) d\lambda_1.$$

Für das Flächenmaß von Intervallen ist dies jedenfalls richtig, denn die Fläche eines 2-Intervalls ist das Produkt der Längen seiner Seiten. Damit gilt es ebenso für alle zulässigen 2-dimensionalen Mengen, denn diese lassen sich als disjunkte Vereinigung von 2-Intervallen darstellen. Somit sollte dies auch für alle ebenen Gebiete gelten, die sich gut durch zulässige Mengen approximieren lassen.

Der Satz von Fubini verallgemeinert diesen Gedanken auf Maße in beliebigen Dimensionen, die sich als Produktmaße darstellen lassen. Dazu betrachten wir jetzt den Raum

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s, \quad r, s \geq 1.$$

Das Maß auf diesem Raum ist gegeben als Produkt

$$\mu_n = \mu_r \times \mu_s$$

Abb 1

Zum Prinzip des Cavalieri

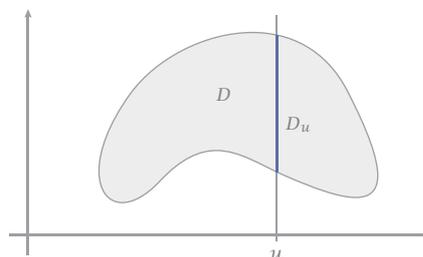
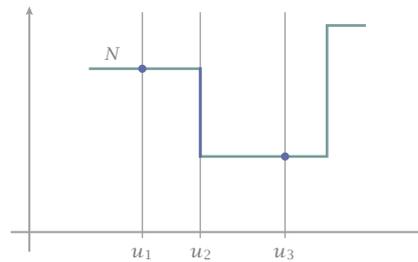


Abb 2
Nullmenge mit
verschiedenen
Schnitten



zweier Maße auf den Faktorräumen. Ziel ist, ein Integral bezüglich μ_n durch zwei Integrale bezüglich der Maße μ_r und μ_s darzustellen.

Eine Komplikation besteht darin, dass im Allgemeinen nicht alle Schnitte einer μ_n -Nullmenge auch μ_r - oder μ_s -Nullmengen sind, sondern auch positives Maß haben können. Die genaue Formulierung des Satzes ist daher etwas umständlich, auch wenn dies für seine Anwendung selten eine Rolle spielt.

Wir vereinbaren noch folgende Notationen. Ist eine Funktion

$$f : \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = f(u, v)$$

gegeben, so sei ihr *u-Schnitt* die partielle Funktion¹

$$f_u : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto f_u(v) := f(u, v).$$

Ist diese Funktion μ_s -integrierbar für alle u außerhalb einer μ_r -Nullmenge in \mathbb{R}^r , so erhalten wir durch Integration über \mathbb{R}^s μ_r -fast überall erklärte Funktion

$$F : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(u) =_{\mu_r} \int_{\mathbb{R}^s} f_u \, d\mu_s.$$

Die Frage ist, ob diese Funktion μ_r -integrierbar ist, und ob

$$\int_{\mathbb{R}^r} F \, d\mu_r = \int_{\mathbb{R}^r} \left(\int_{\mathbb{R}^s} f \, d\mu_s \right) d\mu_r = \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu_n.$$

Diese Frage beantworten wir zuerst für monoton approximierbare Funktionen.

1 Satz von Tonelli Sei $f \in \mathcal{U}^n(\mu_n)$. Dann ist

$$f_u \in_{\mu_r} \mathcal{U}^s(\mu_s), \quad F :=_{\mu_r} \int_{\mathbb{R}^s} f \, d\mu_s \in \mathcal{U}^r(\mu_r),$$

und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu_n = \int_{\mathbb{R}^r} F \, d\mu_r.$$

Dies gilt auch für den Fall unbeschränkter Integrale. \times

¹ Partielle Ableitungen benötigen wir hier nicht, so dass keine Verwechslungsgefahr besteht.

■ **Beweis des Satzes von Tonelli**

Für den Beweis sei $\mathcal{U}^i = \mathcal{U}^i(\mu_i)$ für $i = n, r, s$. Da jedes Maß sich auf genau einen Raum bezieht, können wir auf deren Angabe in Integralen verzichten. — Der Beweis erfolgt nun in mehreren Schritten.

Schritt 1 *Der Satz von Tonelli gilt für die charakteristischen Funktionen beschränkter Intervalle.* ✕

⟨⟨⟨ Für $I = I_r \times I_s$ mit Intervallen $I_r \in \mathcal{J}^r$ und $I_s \in \mathcal{J}^s$ ist $f = \chi_I = \chi_{I_r} \chi_{I_s}$. Für jeden u -Schnitt gilt

$$f_u = \chi_{I,u} = \chi_{I_r}(u) \chi_{I_s} \in \mathcal{U}^s,$$

und Integration über \mathbb{R}^s ergibt

$$F = \int \chi_{I_r} \chi_{I_s} d\mu_s = \mu_s(I_s) \chi_{I_r} \in \mathcal{U}^r.$$

Aufgrund der Definition des Produktmaßes $\mu_n = \mu_r \times \mu_s$ gilt schließlich

$$\begin{aligned} \int F d\mu_r &= \mu_s(I_s) \int \chi_{I_r} d\mu_r \\ &= \mu_s(I_s) \mu_r(I_r) = \mu_n(I) = \int f d\mu_n. \end{aligned}$$

Damit ist für χ_I alles gezeigt. ⟩⟩⟩

Schritt 2 *Der Satz von Tonelli gilt für alle Treppenfunktionen.* ✕

⟨⟨⟨ Treppenfunktionen sind Linearkombinationen charakteristischer Funktionen von Intervallen. Daher genügt es zu zeigen, dass dieser Satz für eine Linearkombination $\alpha f + \beta g$ gilt, wenn er für Treppenfunktionen f und g gilt. Gilt nun der Satz von Tonelli für f und g , so gilt auch für jeden u -Schnitt

$$(\alpha f + \beta g)_u = \alpha f_u + \beta g_u \in \mathcal{T}^s,$$

und es ist

$$F = \int f d\mu_s \in \mathcal{T}^r, \quad G = \int g d\mu_s \in \mathcal{T}^r.$$

Also ist auch

$$\int (\alpha f + \beta g) d\mu_s = \alpha \int f d\mu_s + \beta \int g d\mu_s = \alpha F + \beta G \in \mathcal{T}^r.$$

Und schließlich gilt dann auch, mit dem Satz von Tonelli für f und g ,

$$\begin{aligned} \int (\alpha f + \beta g) d\mu_n &= \alpha \int f d\mu_n + \beta \int g d\mu_n \\ &= \alpha \int F d\mu_r + \beta \int G d\mu_r = \int (\alpha F + \beta G) d\mu_r. \end{aligned}$$

Das war zu zeigen. ⟩⟩⟩

Hilfssatz Sei N eine μ_n -Nullmenge. Dann ist μ_r -fast jeder u -Schnitt

$$N_u = \{v : (u, v) \in N\} \subset \mathbb{R}^s$$

eine μ_s -Nullmenge. \times

⟨⟨⟨ Zu der μ_n -Nullmenge N existiert ^{20.7} eine Folge (I_k) von n -Intervallen, so dass jeder Punkt in N von unendlich vielen Intervallen überdeckt wird und

$$\sum_{k \geq 1} \mu_n(I_k) < \infty.$$

Die u -Schnitte $(I_{k,u})$ bilden dann eine Überdeckung von N_u durch s -Intervalle, wobei jeder Punkt von N_u unendlich oft überdeckt wird. Gilt also

$$\sum_{k \geq 1} \mu_s(I_{k,u}) < \infty,$$

so ist auch N_u eine μ_s -Nullmenge ^{20.7}. — Betrachte dazu

$$\psi_m = \sum_{1 \leq k \leq m} \int \chi_{I_k} d\mu_s.$$

Es ist also

$$\psi(u) = \sum_{k \geq 1} \int \chi_{I_{k,u}} d\mu_s = \sum_{k \geq 1} \mu_s(I_{k,u}).$$

Dies ist eine monoton steigende Folge von Funktionen in \mathcal{T}^r mit beschränkter Integralfolge, denn

$$\int \psi_m d\mu_r = \sum_{1 \leq k \leq m} \int \left(\int \chi_{I_k} d\mu_s \right) d\mu_r \leq \sum_{k \geq 1} \mu_n(I_k) < \infty.$$

Mit Lemma A ^{20.14} gilt also $\psi := \lim \psi_m <_{\mu_r} \infty$. Also ist N_u für μ_r -fast alle u eine μ_s -Nullmenge. $\rangle\rangle\rangle$

Schritt 3 Der Satz gilt für alle monoton approximierbaren Funktionen. \times

⟨⟨⟨ Sei $f \in \mathcal{U}^n$ und (f_k) eine Folge von Treppenfunktionen mit

$$f_k \nearrow_{\mu_n} f, \quad I_{\mu_n}(f_k) \nearrow I_{\mu_n}(f).$$

Die Folge konvergiert also außerhalb einer μ_n -Nullmenge monoton gegen f . Aufgrund des Hilfssatzes gibt es dann eine μ_r -Nullmenge N_r in \mathbb{R}^r , so dass auch

$$f_{k,u} \nearrow_{\mu_s} f_u, \quad u \notin N_r.$$

Mit dem Satz von der monotonen Konvergenz ^{20.19} folgt

$$f_u \in \mathcal{U}^s, \quad \int f_{k,u} d\mu_s \nearrow \int f_u d\mu_s, \quad u \notin N_r.$$

Damit gilt also

$$F_k = \int f_k d\mu_s \nearrow_{\mu_r} F = \int f d\mu_s,$$

wobei die F_k eine Folge in \mathcal{T}^r bilden. Wiederum mit dem Satz von der monotonen Konvergenz ist also $F \in \mathcal{U}^r$, und mit Schritt 2 ist

$$\begin{aligned} \int F d\mu_r &= \lim \int F_k d\mu_r \\ &= \lim \int f_k d\mu_n = \int f d\mu_n. \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung für jede Funktion $f \in \mathcal{U}^n$ bewiesen. \gggg

■ Der Satz von Fubini

Nun betrachten wir den Fall beliebiger messbarer Funktionen. Wie beim Übergang vom Satz von Beppo Levi zum Satz von Lebesgue setzen wir voraus, dass die betrachtete Funktion nicht nur messbar, sondern integrierbar ist. Diese Annahme ist unverzichtbar.

2 **Satz von Fubini** Sei $f \in \mathcal{L}^n(\mu_n)$. Dann ist

$$f_u \in_{\mu_r} \mathcal{L}^s(\mu_s), \quad F :=_{\mu_r} \int_{\mathbb{R}^s} f d\mu_s \in \mathcal{L}^r(\mu_r),$$

und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\mu_n = \int_{\mathbb{R}^r} F d\mu_r. \quad \times$$

\llll Sei $f = u_1 - u_2$ eine zulässige Darstellung von f durch monoton approximierbare Funktionen. Für u_1 und u_2 gilt somit der Satz von Tonelli, wobei nach Voraussetzung alle auftretenden Integrale endlich sind. Die Behauptung für f ergibt sich hieraus mit der Linearität des Integrals. \gggg

In klassischer Notation für Volumenmaße sagt dieser Satz Folgendes aus. Ist $f = f(x) = f(u, \nu)$ integrierbar, so ist der u -Schnitt $f(u, \cdot)$ für fast jedes u eine integrierbare Funktion von ν . Dessen Integral bezüglich ν definiert fast überall eine integrierbare Funktion F von u , und für deren Integral gilt

$$\int_{\mathbb{R}^r} F(u) du = \int_{\mathbb{R}^r} \left(\int_{\mathbb{R}^s} f(u, \nu) d\nu \right) du = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx.$$

Aus Symmetriegründen können wir die Rollen von u und ν vertauschen und erhalten dementsprechend

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^s} \left(\int_{\mathbb{R}^r} f(u, \nu) du \right) d\nu.$$

Dabei bezeichnen du , $d\nu$, dx die Volumenmaße auf \mathbb{R}^r , \mathbb{R}^s respektive \mathbb{R}^n .

In der Regel lässt man die Klammern hierbei weg und schreibt kürzer

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^s} \int_{\mathbb{R}^r} f(u, \nu) \, du \, d\nu = \int_{\mathbb{R}^r} \int_{\mathbb{R}^s} f(u, \nu) \, d\nu \, du.$$

Dies ist »von innen nach außen« zu lesen. Beim letzten Integral zum Beispiel wird der Integrand zuerst bezüglich ν über \mathbb{R}^s integriert, und das Ergebnis anschließend bezüglich u über \mathbb{R}^r . Dies ist etwas ganz anderes als das Integral über \mathbb{R}^n auf der linken Seite!

Typischerweise werden die Sätze von Tonelli und Fubini gemeinsam angewendet, um erst die Integrierbarkeit einer Funktion festzustellen und dann deren Integral durch iterierte Integrale darzustellen.

3 Satz von Tonelli-Fubini Sei $f \in \mathcal{M}^n(\lambda)$. Existiert eines der Integrale

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \, dx, \quad \int_{\mathbb{R}^s} \int_{\mathbb{R}^r} |f(u, \nu)| \, du \, d\nu, \quad \int_{\mathbb{R}^r} \int_{\mathbb{R}^s} |f(u, \nu)| \, d\nu \, du$$

und ist endlich, so auch jedes andere, und alle sind gleich. In diesem Fall ist f integrierbar, und es gilt der Satz von Fubini₂. ✕

⟨⟨⟨ Ist das erste Integral endlich, so ist f integrierbar. Dann ist der Satz von Fubini auf f und $|f|$ anwendbar, und wir sind fertig.

Sei jetzt zum Beispiel das letzte Integral endlich. Die abgeschnittenen Funktionen $|f_k|$ vom Beweis des Majorantenkriteriums_{20,31} sind integrierbar, und mit Fubini gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |f_k| \, dx &= \int_{\mathbb{R}^r} \int_{\mathbb{R}^s} |f_k(u, \nu)| \, d\nu \, du \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^r} \int_{\mathbb{R}^s} |f(u, \nu)| \, d\nu \, du < \infty. \end{aligned}$$

Da dies für alle k gilt, ist auch $|f|$ integrierbar, und wir können wie zuvor argumentieren. ⟩⟩⟩

■ **Beispiele**

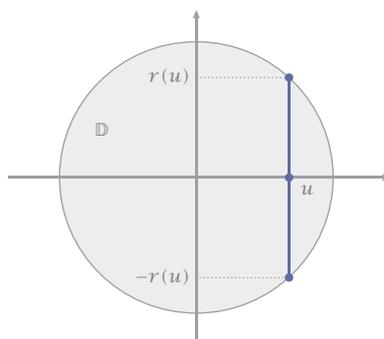
Wir geben hier nur zwei Beispiele. Weitere Anwendungen ergeben sich bei den verschiedenen Formen der Transformationsformel in diesem Kapitel, der Faltungsoperation in Kapitel ?? oder der Fouriertransformation in Kapitel ??.

4 ▶ A. Sei $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe \mathbb{D} . Dann ist

$$\int_{\mathbb{D}} f \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^2} f \chi_{\mathbb{D}} \, d\lambda.$$

Abb 3

Integration über die
Einheitskreisscheibe



Da $\chi_{\mathbb{D}}(u, v) = 1$ für $|v| \leq r(u) := \sqrt{1 - u^2}$ und 0 sonst, erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} f \, d\lambda &= \int_{\mathbb{R}^2} f \chi_{\mathbb{D}} \, d\lambda = \int_{[-1,1]} \left(\int_{[-1,1]} (f \chi_{\mathbb{D}}) \, d\nu \right) du \\ &= \int_{-1}^1 \left(\int_{-r(u)}^{r(u)} f(u, \nu) \, d\nu \right) du. \end{aligned}$$

B. Mit $f(u, \nu) = \sqrt{1 - u^2 - \nu^2}$ erhalten wir insbesondere die Hälfte des Volumens V der Einheitskugel,

$$\frac{V}{2} = \int_{-1}^1 \left(\int_{-r(u)}^{r(u)} \sqrt{1 - u^2 - \nu^2} \, d\nu \right) du.$$

Die Substitution $\nu = r(u) \sin t$ mit $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$ ergibt mit einer kurzen Rechnung

$$\begin{aligned} \frac{V}{2} &= \int_{-1}^1 \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2(u) \cos^2 t \, dt \right) du \\ &= \int_{-1}^1 r^2(u) \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t \, dt \right) du \\ &= \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 (1 - u^2) \, du = \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

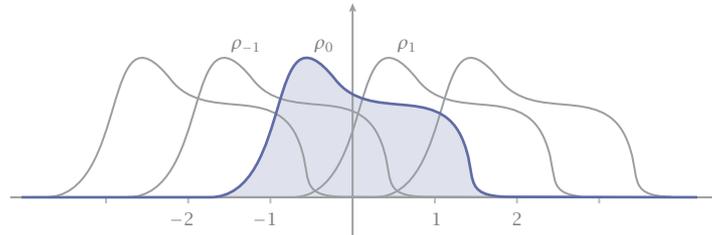
Etwas einfacher wird diese Rechnung später mit Polarkoordinaten ¹⁸. ◀

21.2

Zerlegungen der Eins

Um die Transformationsformel für n -dimensionale Integrale wie auch später das Integral für Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten zu definieren, benötigen wir als technisches Hilfsmittel *Zerlegungen der Eins*. Diese erlauben es in vielen Fällen, eine globale Identität auf lokale Identitäten zurückzuführen.

Abb 4 Zum Beispiel 6



Im Folgenden steht *glatt* für *unendlich oft differenzierbar*.

Definition Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ nicht leer. Eine *Zerlegung der Eins* auf M ist eine Familie \mathcal{T} von glatten Funktionen $\sigma: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger mit folgenden Eigenschaften:

(z-1) Für alle $\sigma \in \mathcal{T}$ gilt $0 \leq \sigma \leq 1$.

(z-2) Zu jedem Punkt in M existiert eine Umgebung U , so dass die U -Familie

$$\mathcal{T}_U := \{\sigma \in \mathcal{T} : \text{supp } \sigma \cap U \neq \emptyset\}$$

endlich ist.

(z-3) Für jeden Punkt $x \in M$ gilt $\sum_{\sigma \in \mathcal{T}} \sigma(x) = 1$. \times

Bemerkungen a. Eine Zerlegung der Eins auf M ist auch eine Zerlegung der Eins für jede Teilmenge von M . Somit genügt als Beispiel der \mathbb{R}^n selbst.

b. Für (z-2) sagt man auch, eine Zerlegung der Eins ist *lokal endlich*. Die Summe in (z-3) ist daher in jedem Punkt von M endlich, und das Problem der Konvergenz der Reihe stellt sich nicht.

c. Gelegentlich genügt auch eine stetige Zerlegung der Eins, bestehend aus stetigen Funktionen. Diese kann man aber ohne Mühe zu glatten Funktionen glätten. Es stellt daher keine Einschränkung dar, nur glatte Zerlegungen der Eins zu betrachten. \rightarrow

5 **Lemma** Ist \mathcal{T} eine Zerlegung der Eins auf M und $K \subset M$ kompakt, so ist auch die K -Familie \mathcal{T}_K endlich. \times

⟨⟨⟨ Nach Voraussetzung gibt es zu jedem Punkt in K eine offene Umgebung U so, dass \mathcal{T}_U endlich ist. Nach dem Satz von Heine-Borel A-20.2 überdecken bereits endlich viele solche Umgebungen U_1, \dots, U_n die kompakte Menge K . Wegen $\mathcal{T}_K \subset \mathcal{T}_{U_1} \cup \dots \cup \mathcal{T}_{U_n}$ ist damit auch \mathcal{T}_K endlich. ⟩⟩⟩

- 6 \Rightarrow **Zerlegung der Eins auf \mathbb{R}^n** Wähle eine beliebige nichtnegative glatte Funktion ρ_0 mit der Eigenschaft, dass

$$\rho_0|_{B_1} > 0, \quad \rho_0|_{B_2^c} = 0.$$

Für $k \in \mathbb{Z}^n$ sei $\rho_k = \rho_0(\cdot - k)$ die um k verschobene Funktion ρ_0 . Dann nehmen auf jeder beschränkten Menge nur endlich viele ρ_k positive Werte an, und die Funktion

$$\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \rho(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \rho_k(x)$$

ist wohldefiniert, positiv und differenzierbar. Die normalisierten Funktionen

$$\sigma_k = \frac{\rho_k}{\rho}, \quad k \in \mathbb{Z}^n$$

bilden dann eine Zerlegung der Eins auf \mathbb{R}^n . \blacktriangleleft

Meistens benötigt man jedoch nicht irgendeine Zerlegung, sondern eine, die einer vorgegebenen offenen Überdeckung einer Menge *untergeordnet* ist.

- 7 **Satz** Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ nicht leer und \mathcal{O} eine offene Überdeckung von M . Dann existiert eine \mathcal{O} *untergeordnete Zerlegung der Eins* \mathcal{T} auf M . Das heißt, für jedes $\sigma \in \mathcal{T}$ existiert ein $U \in \mathcal{O}$, so dass $\text{supp } \sigma \subset U$. \times

⟨⟨⟨ Der Beweis erfolgt in vier Schritten.

1. *Schritt: M ist kompakt* Dann wird M bereits durch endlich viele offene Mengen U_1, \dots, U_n in \mathcal{O} überdeckt, also $M \subset U := U_1 \cup \dots \cup U_n$. Dazu – siehe folgendes Lemma 8 – existieren kompakte Mengen $K_i \subset U_i$ derart, dass deren Inneres K_i° die Menge M ebenfalls überdeckt, also

$$M \subset K_1^\circ \cup \dots \cup K_n^\circ \subset U$$

gilt. Dazu existieren nichtnegative C^∞ -Funktionen ρ_i derart, dass

$$\rho_i|_{K_i} > 0, \quad \rho_i|_{U_i^c} \equiv 0.$$

Somit gilt $\rho_1 + \dots + \rho_n > 0$ auf der kompakten Menge $K_0 := K_1 \cup \dots \cup K_n$, und damit auch auf einer offenen Umgebung $U_0 \supset K_0$. Dazu existiert noch eine C^∞ -Funktion ρ_0 mit

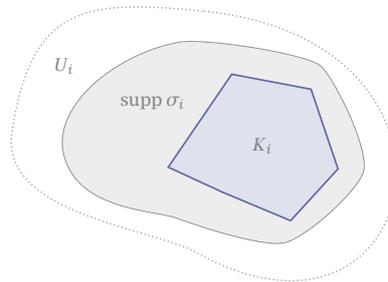
$$\rho_0|_{K_0} \equiv 0, \quad \rho_0|_{U_0^c} > 0.$$

Dann gilt $\rho := \rho_0 + \dots + \rho_n > 0$ auf ganz \mathbb{R}^n , $\rho|_{K_0} = \rho_1 + \dots + \rho_n$, und die Funktionen

$$\sigma_i := \frac{\rho_i}{\rho}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

bilden eine U_1, \dots, U_n und damit \mathcal{O} untergeordnete Zerlegung der Eins auf K_0 und damit auch auf M .

Abb 5
Zum ersten Beweisschritt



2. Schritt: M ist Vereinigung kompakter Mengen M_k Es genügt, eine steigende Folge $(M_k)_{k \geq 1}$ kompakter Mengen mit

$$M = \bigcup_{k \geq 1} M_k, \quad M_k \subset M_{k+1}^\circ,$$

zu betrachten. Definiere für $k \geq 1$ die offenen ›Ringmengen‹ $\Omega_k := M_{k+1}^\circ \setminus M_{k-2}$ und die darin enthaltenen kompakten ›Ringmengen‹

$$K_k = M_k \setminus M_{k-1}^\circ \subset \Omega_k.$$

wobei $M_{-1} := M_0 := \emptyset$. Dann bildet die Familie

$$\mathcal{O}_k := \{U \cap \Omega_k : U \in \mathcal{O}\}$$

eine offene Überdeckung von K_k . Gemäß dem ersten Schritt existiert auf K_k eine \mathcal{O}_k untergeordnete Zerlegung der Eins \mathcal{S}_k , die aus endlich vielen Funktionen besteht, welche außerdem sämtlich auf M_{k-2} verschwinden. Innerhalb der Gesamtfamilie $\mathcal{S} := \bigcup_{k \geq 1} \mathcal{S}_k$ verschwinden somit auf jeder Menge M_k nur endlich viele Funktionen nicht identisch. Die Summe

$$\rho_s = \sum_{\rho \in \mathcal{S}} \rho$$

ist also in jedem Punkt von M endlich. Setzen wir

$$\sigma := \frac{\rho}{\rho_s}, \quad \rho \in \mathcal{S},$$

so bilden diese Funktionen eine \mathcal{O} untergeordnete Zerlegung der Eins auf M .

3. Schritt: M ist offen Die Mengen

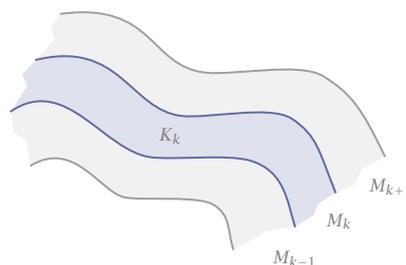
$$M_k := \{x \in M : |x| \leq k \wedge \text{dist}(x, M^c) \geq 1/k\}, \quad k \geq 1,$$

bilden eine Ausschöpfung von M durch kompakte Mengen mit $M_k \subset M_{k+1}^\circ$. Also können wir den zweiten Schritt anwenden.

Abb 6

Die kompakte Menge

$$K_k = M_k \setminus M_{k-1}^\circ$$



4. Schritt: M ist beliebig Die Menge $\Omega := \bigcup_{U \in \mathcal{O}} U$ ist offen und enthält M . Eine Zerlegung der Eins auf Ω gemäß dem vorangehenden Schritt ist dann auch eine Zerlegung der Eins auf M . \gggg

Für den Beweis des ersten Schritts benötigen wir noch folgendes

- 8 **Lemma** Zu jeder endlichen offenen Überdeckung U_1, \dots, U_n einer kompakten Menge M existieren kompakte Mengen $K_i \subset U_i$, deren Inneres ebenfalls M überdecken. \times

\llll Wir konstruieren diese Mengen induktiv wie folgt. Angenommen, wir haben bereits kompakte Mengen K_1, \dots, K_{i-1} , so dass

$$K_1^\circ \cup \dots \cup K_{i-1}^\circ \cup U_i \cup U_{i+1} \cup \dots \cup U_n \supset M.$$

Für $i = 1$ entspricht dies der Ausgangssituation, wo wir noch keine kompakte Menge konstruiert haben. Betrachte dann

$$C_i := M \setminus (K_1^\circ \cup \dots \cup K_{i-1}^\circ \cup U_{i+1} \cup \dots \cup U_n).$$

Diese Menge ist abgeschlossen und in M enthalten, also kompakt. Es gilt auch $C_i \subset U_i$. Dann existiert auch eine kompakte Menge K_i derart, dass

$$C_i \subset K_i^\circ \subset K_i \subset U_i.$$

Damit erhalten wir

$$K_1^\circ \cup \dots \cup K_i^\circ \cup U_{i+1} \cup \dots \cup U_n \supset M,$$

und wir sind fertig. \gggg

Bemerkungen a. Für eine kompakte Menge M existieren also auch endliche Zerlegungen der Eins.

b. Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\mathcal{O} = \{\Omega\}$, so kann eine diesbezügliche Zerlegung der Eins trotzdem nicht aus endlich vielen Funktionen bestehen $A-7$.

c. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und \mathcal{O} die Familie aller offenen Teilmengen von Ω . Eine \mathcal{O} untergeordnete Zerlegung der Eins \mathcal{T} besteht dann aus abzählbar vielen nichttrivialen glatten Funktionen σ derart, dass

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{T}} \sigma(x) = \chi_{\Omega}. \quad \rightarrow$$

21.3

Die Transformationsformel

Ein wesentliches Hilfsmittel der eindimensionalen Integrationstheorie ist die Substitutionsregel. Ist φ stetig differenzierbar auf dem Intervall $I = [a, b]$ und f stetig auf dem Bildintervall $\varphi(I)$, so gilt bekanntlich 11.21

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt = \int_a^b f(\varphi(s)) \varphi'(s) ds.$$

Dies ergibt sich unmittelbar aus dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung. Hierbei ist es nicht einmal erforderlich, dass φ die Orientierung des Intervalls I erhält oder I bijektiv auf $\varphi(I)$ abbildet.

In dieser Allgemeinheit werden wir die Substitutionsregel *nicht* für das höherdimensionale Integral formulieren. Wir setzen zumindest voraus, dass φ *bijektiv* ist. Auf einem Intervall ist φ dann notwendigerweise monoton. Die beiden möglichen Fälle der Substitutionsregel – entweder positive oder negative Ableitung – lassen sich dann zusammenfassen zu

$$\int_{\varphi(I)} f(t) dt = \int_I f(\varphi(s)) |\varphi'(s)| ds.$$

Hierbei wird das linke Integral immer vom linken zum rechten Endpunkt des Intervalls $\varphi(I)$ gebildet, unabhängig davon, wie I auf $\varphi(I)$ abgebildet wird.

In dieser Form verallgemeinern wir die Substitutionsregel auf höhere Dimensionen. Man beachte, dass sie sich nur auf das Volumenmaß λ bezieht.

- 9 **Transformationsformel** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und φ ein Diffeomorphismus von Ω auf die offene Menge $\varphi(\Omega)$. Ist f auf $\varphi(\Omega)$ integrierbar, so gilt

$$\int_{\varphi(\Omega)} f d\lambda = \int_{\Omega} (f \circ \varphi) |\det D\varphi| d\lambda.$$

Insbesondere existiert das rechts stehende Integral. \times

Ist $(f \circ \varphi) |\det D\varphi|$ integrierbar, so folgt durch Anwendung der Formel mit φ^{-1} umgekehrt auch die Integrierbarkeit von f . Beide Annahmen sind also äquivalent.

Wir beweisen die Transformationsformel für den Fall, dass die Determinante von φ überall positiv ist. Der andere Fall lässt sich mithilfe der Reflexion einer Koordinate auf diesen zurückführen A-10 . Der erste Schritt besteht in der Reduktion auf ein lokales Problem mithilfe einer Zerlegung der Eins und einer Adaption der Transformation φ gemäß dem folgenden Lemma, das wir im Anschluss beweisen werden.

- 10 Lokalisierungslemma** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein lokaler Diffeomorphismus mit positiver Jacobideterminante. Dann existiert zu jedem Punkt in Ω eine Umgebung $U \subset \Omega$ und eine stetig differenzierbare Abbildung $\psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ derart, dass

$$\psi|_U = \varphi, \quad \psi|_{I^c} = \text{id},$$

für ein hinreichend großes Intervall I , sowie $\psi(U) \cap \psi(U^c) = \emptyset$. \times

Das Bild jeder dieser offenen Mengen U unter dem Diffeomorphismus φ ist eine offene Menge in $\varphi(\Omega)$, und ihre Gesamtheit bildet eine offene Überdeckung von $\varphi(\Omega)$. Sei \mathcal{T} eine ihr untergeordnete Zerlegung der Eins γ . Dann gilt

$$f = \sum_{\sigma \in \mathcal{T}} \sigma f.$$

Gilt nun für jedes σ die lokalisierte Transformationsformel

$$\int_{\varphi(\Omega)} (\sigma f) \, d\lambda = \int_{\Omega} (\sigma f) \circ \varphi \det D\varphi \, d\lambda.$$

so folgt durch Summieren über $\sigma \in \mathcal{T}$ daraus die allgemeine Transformationsformel η .

Die lokalisierte Formel schreiben wir noch weiter um. Aufgrund der Wahl von \mathcal{T} ist der Träger eines jeden $\sigma \in \mathcal{T}$ in einer offenen Menge $\varphi(U)$ enthalten, auf die das Lokalisierungslemma zutrifft. Somit ist einerseits

$$\int_{\varphi(\Omega)} \sigma f \, d\lambda = \int_{\varphi(U)} \sigma f \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} \sigma f \, d\lambda.$$

Andererseits gilt mit der Abbildung ψ des Lokalisierungslemmas

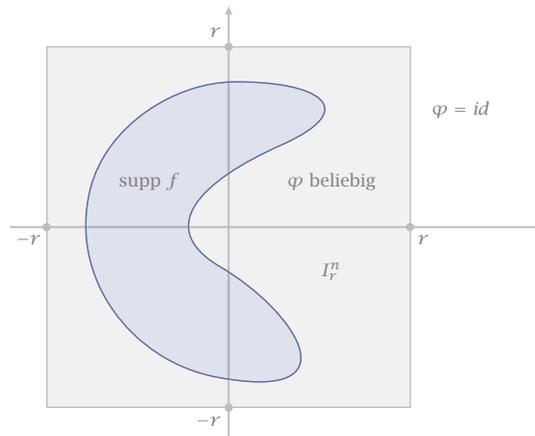
$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\sigma f) \circ \varphi \det D\varphi \, d\lambda &= \int_U (\sigma f) \circ \varphi \det D\varphi \, d\lambda \\ &= \int_U (\sigma f) \circ \psi \det D\psi \, d\lambda, \end{aligned}$$

da $(\sigma f) \circ \varphi$ auf U^c verschwindet und ψ auf U mit φ übereinstimmt. Da $\psi(U^c)$ von $\psi(U)$ disjunkt ist, gilt weiter

$$\int_{\Omega} (\sigma f) \circ \varphi \det D\varphi \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} (\sigma f) \circ \psi \det D\psi \, d\lambda.$$

Abb 7

Zum Beweis der lokalen Transformationsformel



Die allgemeine Transformationsformel reduziert sich damit auf folgendem Satz, wobei wir wieder φ statt ψ schreiben.

- 11 **Lokale Transformationsformel** Sei $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar mit $\varphi = id$ außerhalb eines Intervalls I . Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ \varphi) \det D\varphi \, d\lambda$$

für jede Funktion $f \in \mathcal{L}^n(\lambda)$ mit kompaktem Träger. \times

««« Wir können $f \in C^1$ und $\varphi \in C^2$ annehmen. Durch einen Approximationsprozess folgt dann die Behauptung für den allgemeinen Fall.

Definiere $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$g(x) = \int_{-\infty}^{x_1} f(t, x_2, \dots, x_n) \, dt.$$

Wegen der Kompaktheit des Trägers von f ist diese Funktion in jedem Punkt wohldefiniert, und es gilt $\partial_1 g = f$. Somit ist g ebenfalls stetig differenzierbar. Also ist

$$\nabla(g \circ \varphi) = \sum_{i=1}^n (\partial_i g \circ \varphi) \nabla \varphi_i,$$

wobei $\nabla = (\partial_1, \dots, \partial_n)^\top$. Aufgrund der Multilinearität und Antisymmetrie der Determinante ist weiter

$$\begin{aligned} \det(\nabla(g \circ \varphi), \nabla \varphi_2, \dots, \nabla \varphi_n) \\ &= \det((\partial_1 g \circ \varphi) \nabla \varphi_1, \nabla \varphi_2, \dots, \nabla \varphi_n) \\ &= (\partial_1 g \circ \varphi) \det D\varphi. \end{aligned}$$

Wählen wir nun das Intervall $I^n = I_r^n$ mit $I_r = [-r, r]$ so groß, dass $f \equiv 0$ und $\varphi = id$ auf dem Komplement von I^n , so gilt mit $f = \partial_1 g$ also

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ \varphi) \det D\varphi \, d\lambda &= \int_{I^n} (f \circ \varphi) \det D\varphi \, d\lambda \\ &= \int_{I^n} (\partial_1 g \circ \varphi) \det D\varphi \, d\lambda \\ &= \int_{I^n} \det(\nabla(g \circ \varphi), \nabla\varphi_2, \dots, \nabla\varphi_n) \, d\lambda. \end{aligned}$$

Wir entwickeln nun die letzte Determinante nach der ersten Spalte und bezeichnen die zugehörigen Unterdeterminanten einschließlich ihres Vorzeichenfaktors mit M_i . Mit Fubini und partieller Integration wird das letzte Integral zu

$$\begin{aligned} &\int_{I^n} \sum_{i=1}^n \partial_i(g \circ \varphi) M_i \, d\lambda \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{I_r^{n-1}} \int_{I_r} \partial_i(g \circ \varphi) M_i \, d\lambda_1 \, d\lambda_{n-1} \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ \int_{I_r^{n-1}} (g \circ \varphi) M_i \Big|_{-r}^r \, d\lambda_{n-1} - \int_{I_r^{n-1}} \int_{I_r} (g \circ \varphi) \partial_i M_i \, d\lambda_1 \, d\lambda_{n-1} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{I_r^{n-1}} (g \circ \varphi) M_i \Big|_{-r}^r \, d\lambda_{n-1} - \int_{I^n} (g \circ \varphi) (\partial_1 M_1 + \dots + \partial_n M_n) \, d\lambda. \end{aligned}$$

Für eine C^2 -Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ gilt aber A_{-11}

$$\partial_1 M_1 + \dots + \partial_n M_n \equiv 0,$$

das letzte Integral verschwindet also. Da $\varphi = id$ außerhalb von I^n , verschwinden auch die Unterdeterminanten M_2, \dots, M_n auf dem Rand von I^n , während

$$(g \circ \varphi) M_1 \Big|_{-r}^r = g \Big|_{-r}^r = g(r, \cdot).$$

Zusammen genommen erhalten wir also mit Fubini und der Definition von g

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ \varphi) \det D\varphi \, d\lambda &= \int_{I_r^{n-1}} g(r, \cdot) \, d\lambda_{n-1} \\ &= \int_{I_r^{n-1}} \int_{I_r} f \, d\lambda_1 \, d\lambda_{n-1} = \int_{I^n} f \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda. \end{aligned}$$

Genau das wollten wir beweisen. \gggg

■ Beweis des Lokalisierungslemmas

Es fehlt noch der Beweis des Lokalisierungslemmas. Dazu benötigen wir folgendes Ergebnis aus der linearen Algebra.

- 12 **Deformationslemma** Jede reelle Matrix A mit positiver Determinante kann so in die Identitätsmatrix defomiert werden, dass alle Determinanten entlang dieser Deformation zwischen $\det A$ und 1 liegen. \times

⟨⟨⟨ Betrachte die erste Spalte von A . Falls $a_{11} \leq 0$, so gibt es immer eine zweite Spalte in A , so dass die ersten Komponenten dieser beiden Spalten nicht gleichzeitig Null sind. Durch eine starre Drehung in der von beiden Spalten aufgespannten Ebene können wir erreichen, dass $a_{11} > 0$, während sich die Determinante der Matrix nicht ändert.

Ist nun $a_{11} > 0$, so können wir durch eine kontinuierliche Version des Gaußschen Eliminationsprozesses erreichen, dass sämtliche übrigen Komponenten der ersten Spalte und Zeile verschwinden. Auch hierbei ändert sich die Determinante der Matrix nicht.

Verfahren wir nun induktiv, so deformieren wir A in eine Diagonalmatrix mit positiven Komponenten, ohne die Determinante zu beeinflussen. Deformation der Diagonalkomponenten zu 1 führt dann zum Ziel.

Jeder einzelne Deformationsschritt kann durch eine stetige Kurve von Matrizen beschrieben werden. Durch entsprechende Parametrisierung wird die gesamte Familie auch glatt. $\rangle\rangle\rangle$

⟨⟨⟨ *Beweis des Lokalisierungslemmas* Betrachte einen lokalen Diffeomorphismus φ um 0 mit $\varphi(0) = 0$. Setzen wir $\Lambda = D\varphi(0)$, so ist

$$\varphi = \Lambda + \hat{\varphi}, \quad \hat{\varphi} = o(\|x\|).$$

Wegen der Umkehrbarkeit von Λ gilt außerdem

$$m \|x\| \leq \|\Lambda x\| \leq m^{-1} \|x\|$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit einer hinreichend kleinen Konstanten $m > 0$.

Zuerst eliminieren wir die Nichtlinearität $\hat{\varphi}$ außerhalb einer kleinen Umgebung von 0. Wähle dazu eine beliebige *Abschneidefunktion* σ , also eine glatte Funktion $\sigma: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ mit $\sigma|_{B_1} \equiv 1$ und $\sigma|_{B_2^c} \equiv 0$, und setze

$$\chi = \Lambda + \sigma_\varepsilon \hat{\varphi}, \quad \sigma_\varepsilon = \sigma \circ \varepsilon^{-1}.$$

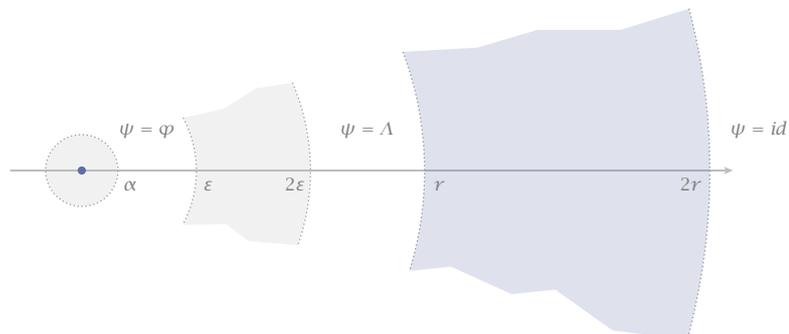
Für $0 < \alpha < \varepsilon$ und ε hinreichend klein gilt dann

$$\|\chi\|_{B_\alpha} \leq m^{-1} \alpha + \|\hat{\varphi}\|_{B_\alpha} \leq 2m^{-1} \alpha,$$

während

$$\|\chi\|_{B_{2\varepsilon} \setminus B_\varepsilon} \geq m\varepsilon - \|\hat{\varphi}\|_{B_{2\varepsilon} \setminus B_\varepsilon} \geq m\varepsilon/2.$$

Abb 8 Zum Beweis des Lokalisierungslemmas



Für $\alpha < m^2\varepsilon/4$ ist also $\|\chi\|_{B_\alpha} < \|\chi\|_{B_\varepsilon^c}$, so dass die Mengen $\chi(B_\alpha)$ und $\chi(B_\varepsilon^c)$ disjunkt sind. Da außerdem $\chi|_{B_\varepsilon} = \varphi$ injektiv ist, gilt sogar

$$\chi(B_\alpha) \cap \chi(B_\varepsilon^c) = \emptyset.$$

Damit ist der erste Schritt abgeschlossen.

Im zweiten Schritt deformieren wir Λ außerhalb einer großen Kugel zur Identität. Sei dazu $\Lambda(t)$ mit $0 \leq t \leq 1$ eine Deformation₁₂ von Λ mit $\Lambda(0) = \text{Id}$ und $\Lambda(1) = \Lambda$. Für

$$L_r = \Lambda \circ \sigma_r, \quad L_r(x) = \Lambda(\sigma_r(x))x,$$

gilt dann

$$L_r|_{B_r} = \Lambda(0) = \Lambda, \quad L_r|_{B_{2r}^c} = \Lambda(1) = \text{id}.$$

Setzen wir also $\psi = L_r + \sigma_\varepsilon \hat{\varphi}$, so ist

$$\psi|_{B_\varepsilon} = \chi|_{B_\varepsilon} = \varphi, \quad \psi|_{B_r} = \chi, \quad \psi|_{B_{2r}^c} = \text{id}.$$

Da außerdem $\Lambda(t)$ für $0 \leq t \leq 1$ regulär ist, ist $\psi(B_r^c)$ für hinreichend große r disjunkt von B_α . Somit gilt auch noch

$$\psi(B_\alpha) \cap \psi(B_\alpha^c) = \emptyset.$$

Somit erfüllt ψ alle Behauptungen des Lokalisierungslemmas mit $U = B_\alpha$. \gggg

21.4

Der Satz von Sard

In der Transformationsformel können wir tatsächlich auf die Bedingung verzichten, dass die Jacobideterminante nirgends verschwindet. Es genügt, dass

die Abbildung stetig differenzierbar und bijektiv ist. Dies gründet sich auf dem nächsten Satz, der auch in anderen Zusammenhängen nützlich ist.

13 **Satz von Sard** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und

$$S = \{\det D\varphi = 0\} \subset \Omega.$$

Dann ist $\varphi(S)$ eine λ -Nullmenge. Mit anderen Worten, die Menge der kritischen Werte einer stetig differenzierbaren Abbildungen ist eine Nullmenge. \times

► A. Ist φ ein Diffeomorphismus, so ist $S = \emptyset$ und damit auch $\varphi(S) = \emptyset$ eine Nullmenge.

B. Ist φ eine singuläre lineare Abbildung, so ist $S = \Omega$. Aber $\varphi(S)$ ist enthalten in einer Hyperebene und deshalb eine λ -Nullmenge.

C. Ist φ eine konstante Abbildung, so ist ebenfalls $S = \Omega$. Aber $\varphi(S)$ ist eine 1-Punkt-Menge und damit eine λ -Nullmenge. \blacktriangleleft

Während die kritischen Werte einer C^1 -Abbildung eine Nullmenge bilden, kann ihr gesamter Definitionsbereich aus kritischen Punkten bestehen.

⟨⟨⟨ Beweis des Satzes von Sard Es genügt, die Aussage für ein kompaktes n -Intervall I in Ω zu beweisen. Die allgemeine Behauptung folgt dann durch Überdecken einer beliebigen offenen Menge durch abzählbar viele solche Intervalle und der Bemerkung, dass die abzählbare Vereinigung von Nullmengen wieder eine Nullmenge ist. Auf einem solchen kompakten Intervall I ist $\|D\varphi\|$ beschränkt und gleichmäßig stetig 10.18. Es gibt also ein $M > 0$ derart, dass

$$|\varphi(v) - \varphi(u)| \leq \max_{z \in [u, v]} \|D\varphi(z)\| |v - u| \leq M |v - u|,$$

und zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass

$$\|D\varphi(v) - D\varphi(u)\| < \varepsilon, \quad |v - u| < \delta,$$

jeweils für alle $u, v \in I$.

Wir unterteilen nun jede Seite von I in m gleich lange Intervalle und wählen dabei m so groß, dass die Seitenlängen der m^n entstehenden Teilintervalle kleiner als δ sind. Angenommen, in einem dieser kleinen Intervalle J liegt ein kritischer Punkt u . Dann ist $\det D\varphi(u) = 0$, also $D\varphi(u)$ eine lineare Abbildung in eine Hyperebene H . Aufgrund des Lemmas von Hadamard 14.16 gilt andererseits

$$\varphi(v) = \varphi(u) + D\varphi(u)(v - u) + E(u, v)(v - u)$$

mit

$$E(u, v) = \int_0^1 (D\varphi(u + t(v - u)) - D\varphi(u)) dt,$$

so dass $\|E(u, v)\| < \varepsilon$ für $|u - v| < \delta$. Das bedeutet, dass sich $\varphi(v)$ auf J von der Hyperebene H um weniger als

$$|E(u, v)(v - u)| \leq \varepsilon |v - u|$$

entfernt. Gleichzeitig liegen alle Bilder in einer Kugel um u mit Radius kleiner als $M |v - u|$. Somit liegt das gesamte Bild $\varphi(J)$ in einem Zylinder mit Höhe $2\varepsilon |v - u|$ und Basisradius $M |v - u|$. Für das Volumen gilt also

$$\lambda(\varphi(J)) \leq c\varepsilon |v - u|^n \leq c\varepsilon \lambda(J).$$

Summieren wir über alle solchen kleinen Intervalle J , die einen kritischen Punkt enthalten, so folgt

$$\lambda(\varphi(S)) \leq c\varepsilon \lambda(I).$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, muss $\varphi(S)$ eine Nullmenge sein. \gggg

Daraus ergibt sich folgende

- 14 **Allgemeine Transformationsformel** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und φ eine bijektive, stetig differenzierbare Abbildung von Ω auf die offene Menge $\varphi(\Omega)$. Ist f auf $\varphi(\Omega)$ integrierbar so gilt

$$\int_{\varphi(\Omega)} f \, d\lambda = \int_{\Omega} (f \circ \varphi) |\det D\varphi| \, d\lambda. \quad \times$$

\llll Auf der abgeschlossenen Menge $\Omega_0 = \{\det D\varphi = 0\} \subset \Omega$ verschwindet das rechts stehende Integral, da dort der Integrand verschwindet. Das links stehende Integral über $\varphi(\Omega_0)$ verschwindet ebenfalls aufgrund des Satzes von Sard₁₃. Auf dem offenen Komplement $\Omega \setminus \Omega_0$ ist φ ein Diffeomorphismus, und Anwendung der Transformationsformel₉ ergibt die Behauptung. \gggg

Bemerkung Tatsächlich längst sich auch die Bedingung der Bijektivität abschwächen. Es genügt, dass der *Abbildungsgrad* von $\varphi: \Omega \rightarrow \varphi(\Omega)$ gerade 1 ist. \rightarrow

21.5

Anwendungen der Transformationsformel

■ Der Zwischenwertsatz im \mathbb{R}^n

An der lokalen Transformationsformel₁₁ fällt auf, dass die Abbildung φ weder als injektiv noch als surjektiv vorausgesetzt wird. Die Surjektivität lässt sich jedoch leicht zeigen. Dazu betrachten wir der Einfachheit halber die abgeschlossene Einheitskugel $\mathbb{B} = \mathbb{B}^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$.

- 15 **Lemma** Sei $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar mit $\varphi|_{\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{B}} = id$. Dann ist φ surjektiv. \times

⟨⟨⟨⟨ Angenommen, es gibt einen Punkt p ohne Urbild. Dann ist $\|p\| < 1$, da andernfalls p ein Urbild hat. Da $\varphi(\mathbb{B})$ abgeschlossen ist und p nicht enthält, existiert auch eine offene Umgebung U um p , die nicht im Bild von φ liegt. Wähle eine stetige Funktion f mit Träger in U und

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda \neq 0.$$

Aufgrund der lokalen Transformationsformel $_{11}$ ist aber

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ \varphi) \det D\varphi \, d\lambda = 0,$$

da nach Konstruktion $f \circ \varphi \equiv 0$. Somit erhalten wir einen Widerspruch. $\rangle\rangle\rangle\rangle$

Aus diesem Lemma folgt der

- 16 **Zwischenwertsatz im \mathbb{R}^n** Sei $\varphi: \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig mit $\varphi|_{\partial\mathbb{B}} = id$. Dann nimmt φ jeden Wert in \mathbb{B} an. Es gilt also

$$\varphi(\mathbb{B}) \supset \mathbb{B}. \quad \times$$

⟨⟨⟨⟨ Setze φ außerhalb von \mathbb{B} stetig durch id fort und approximiere diese Abbildung durch stetig differenzierbare Abbildungen ψ mit $\psi|_{\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{B}} = id$. Aufgrund des letzten Lemmas sind diese Abbildungen surjektiv, überdecken also auch \mathbb{B} . Diese Eigenschaft bleibt im Grenzübergang $\psi \rightarrow \varphi$ erhalten. $\rangle\rangle\rangle\rangle$

■ Der Brouwersche Fixpunktsatz

Neben dem Banachschen Fixpunktsatz ist dies einer der fundamentalen Fixpunktsätze der Analysis. Er sagt aus, dass jede stetige Selbstabbildung der abgeschlossenen n -dimensionalen Einheitskugel einen Fixpunkt besitzt.

- 17 **Brouwerscher Fixpunktsatz** Jede stetige Selbstabbildung der abgeschlossenen Einheitskugel \mathbb{B} hat mindestens einen Fixpunkt. \times

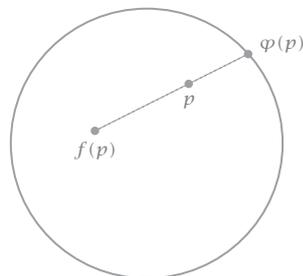
Über die Bildmenge $\varphi(\mathbb{B})$ wird nichts angenommen, außer dass sie in \mathbb{B} liegt. Zum Beispiel kann φ eine konstante Abbildung sein mit Bildpunkt in \mathbb{B} . Diese hat offensichtlich einen Fixpunkt.

⟨⟨⟨⟨ Angenommen, es gibt eine solche Abbildung f ohne Fixpunkt. Dann können wir eine Abbildung

$$\varphi: \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}, \quad p \mapsto \varphi(p)$$

Abb 9

Konstruktion der
Abbildung φ



definieren, die jedem Punkt $p \in \mathbb{B}$ den Schnittpunkt des Halbstrahls von $f(p)$ durch p mit der Einheitssphäre zuordnet – siehe Abbildung 9. Da f keinen Fixpunkt hat, ist dieser Strahl und damit der Bildpunkt für jedes $p \in \mathbb{B}$ wohldefiniert und definiert eine stetige Abbildung. Offensichtlich gilt

$$\varphi(\mathbb{B}) \subset \partial\mathbb{B}, \quad \varphi|_{\partial\mathbb{B}} = id.$$

Das ist aber aufgrund des Zwischenwertsatzes ₁₆ nicht möglich. \gggg

■ Polarkoordinaten

Diese sind definiert durch _{19.1}

$$\chi: \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

Sie bilden $D = (0, \infty) \times (0, 2\pi)$ diffeomorph auf die Ebene abzüglich der Halbgeraden $[0, \infty)$ ab. Da diese bezüglich des Flächenmaßes eine Nullmenge bildet, fällt dies für das Integral über \mathbb{R}^2 nicht ins Gewicht. Dasselbe gilt für den Rand von D . Wegen $\det D\chi = r$ gilt für jede auf \mathbb{R}^2 integrierbare Funktion f deshalb

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \, dx \, dy &= \int_D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r \, dr \, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\infty f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r \, dr \, d\varphi. \end{aligned}$$

Hierbei halten wir uns an die Vereinbarung, dass Mehrfachintegrale »von innen nach außen« zu lesen sind.

- 18 ▶ Polarkoordinaten bieten sich natürlich vor allem bei rotationssymmetrischen Funktionen an. Zum Beispiel wird

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy &= \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r e^{-r^2} dr d\varphi \\ &= 2\pi \int_0^\infty r e^{-r^2} dr \\ &= -\pi e^{-r^2} \Big|_0^\infty = \pi. \end{aligned}$$

Andererseits ist aufgrund des Satzes von Fubini

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy &= e^{-x^2} \int_{-\infty}^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty e^{-y^2} dy \right) dx \\ &= \left(\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{-\infty}^\infty e^{-y^2} dy \right) = \left(\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx \right)^2. \end{aligned}$$

Wir erhalten somit

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Dieses Ergebnis ist mit eindimensionaler Argumentation nur recht aufwändig zu erreichen. ◀

- ▶ *Volumen der Einheitskugel* ₄ Mit Polarkoordinaten ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{V}{2} &= \int_{\mathbb{D}} \sqrt{1-u^2-v^2} d\lambda = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r \sqrt{1-r^2} dr d\varphi \\ &= 2\pi \int_0^1 r \sqrt{1-r^2} dr \\ &= \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

Das Volumen einer Kugel vom Radius r ist dementsprechend $4\pi r^3/3$. ◀

■ Zylinderkoordinaten

Diese sind definiert durch

$$\chi: \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \zeta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ \zeta \end{pmatrix}$$

und bilden $D = (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ diffeomorph auf den \mathbb{R}^3 abzüglich der Halbebene $[0, \infty) \times \{0\} \times \mathbb{R}$ ab. Diese bildet bezüglich des Volumenmaßes eine Nullmenge und fällt für das Integral über \mathbb{R}^3 nicht ins Gewicht. Dasselbe gilt für

den Rand von D . Wegen $\det D\chi = r$ gilt für deshalb

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, \zeta) r \, dr \, d\varphi \, d\zeta. \end{aligned}$$

■ Kugelkoordinaten

Diese sind definiert durch ^{19.1}

$$\chi: \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \sin \theta \\ r \sin \varphi \sin \theta \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$$

mit $0 < r < \infty$, $0 < \varphi < 2\pi$ und $0 < \theta < \pi$. Mit der Jacobideterminante

$$\det D\chi = r^2 \sin \theta$$

gilt für jede auf \mathbb{R}^3 integrierbare Funktion f deshalb

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \\ = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(r \cos \varphi \sin \theta, \dots, r \cos \theta) r^2 \sin \theta \, dr \, d\varphi \, d\theta. \end{aligned}$$

► **Volumen der Einheitskugel** Auf $D = (0, 1) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)$ parametrisieren Kugelkoordinaten die Einheitskugel B bis auf eine Nullmenge. Für deren Volumen V erhalten wir demnach mit Fubini, wie zuvor,

$$\begin{aligned} V = \int_B 1 \, d\lambda &= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \sin \theta \, dr \, d\varphi \, d\theta \\ &= 2\pi \int_0^1 r^2 \, dr \int_0^{\pi} \sin \theta \, d\theta \\ &= \frac{4\pi}{3}. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$