

22

Der Fundamentalsatz im $\mathbb{R}^n$

Für eindimensionale Integrale gilt bekanntlich

$$\int_a^b f = F \Big|_a^b$$

mit einer Stammfunktion F von f . Man erhält das Integral einer Funktion f über ein *Intervall* also durch Auswertung einer Stammfunktion F über dessen *Rand*. Sucht man nach etwas Ähnlichem in höheren Dimensionen, so steht man vor der Aufgabe, Integrale über Kurven, Flächen und allgemeinere Mannigfaltigkeiten zu betrachten.

Dabei stellt sich nicht nur das Problem, *wie* man integrieren soll, sondern auch *was*. Es ist möglich, Funktionen oder Vektorfelder über Mannigfaltigkeiten zu integrieren, doch erfordert dies in jedem einzelnen Fall eine eigene Herangehensweise. Statt dessen hat sich als einheitlicher Zugang der Kalkül der *Differenzialformen* etabliert. Dies sind die *natürlichen* Objekte, die über Mannigfaltigkeiten integriert werden.

Beim ersten Kennenlernen wirkt dieser Kalkül wie eine Ansammlung abstrakter und willkürlicher Definitionen. Der Lohn dieser Mühen ist aber ein einheitlicher Zugang zu den fundamentalen Integralsätzen von Green, Gauß und Stokes in zwei und drei Dimensionen. Sie alle sind unmittelbare Folgen eines allgemeinen Satzes über den Zusammenhang zwischen Integralen über Mannigfaltigkeiten und deren Rand, der ebenfalls nach Stokes benannt ist und besagt, dass

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Der klassische Fundamentalsatz in dieser Schreibweise lautet

$$\int_{[a,b]} df = \int_{\partial[a,b]} f.$$

22.1

Etwas multilineare Algebra

Für die Integration entlang Kurven betrachteten wir 1-Formen $\alpha: V \hookrightarrow V^*$, die jedem Punkt im Definitionsbereich in V eine Linearform im Dualraum V^* zuordnet. Dieses Konzept erweitern wir jetzt auf *alternierende* k -lineare Funktionen.

■ Alternierende Formen

Definition Eine *alternierende k -Form*, wobei $k \geq 1$, auf einem reellen Vektorraum V ist eine k -lineare Abbildung

$$\omega: V^k \rightarrow \mathbb{R},$$

die bei Vertauschung von je zwei Argumenten das Vorzeichen wechselt. Der Raum aller solchen Abbildungen wird mit $\Lambda^k V$ bezeichnet. Für $k = 0$ sei $\Lambda^0 V := \mathbb{R}$. ✕

Für beliebige $1 \leq i < j \leq k$ gilt also

$$\omega(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots) = -\omega(\dots, v_j, \dots, v_i, \dots).$$

Diese Eigenschaft bleibt unter Linearkombinationen erhalten, $\Lambda^k V$ bildet also einen linearen Vektorraum. Sie ist allerdings erst für $k \geq 2$ relevant, denn für $0 \leq k \leq 1$ gibt es keine Argumente, die man vertauschen könnte.

► A. Jedes Element des Dualraums V^* ist eine alternierende 1-Form. Es ist also $V^* = \Lambda^1 V$.

B. Die Determinante $\det: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$, aufgefasst als n -lineare Form in den Spalten einer $n \times n$ -Matrix, ist eine alternierende n -Form. ◀

1 **Lemma** Für eine k -lineare Form ω sind folgende Aussagen äquivalent.

- (i) Die Form ω ist alternierend.
- (ii) Es gilt $\omega(v_1, \dots, v_k) = 0$, wenn zwei Argumente gleich sind.
- (iii) Es gilt $\omega(v_1, \dots, v_k) = 0$, wenn die Argumente linear abhängig sind.
- (iv) Für jede Permutation τ von $(1, \dots, k)$ gilt

$$\omega(v_{\tau_1}, \dots, v_{\tau_k}) = \text{sgn}(\tau) \omega(v_1, \dots, v_k),$$

wobei $\text{sgn}(\tau)$ das Signum der Permutation τ bezeichnet. ✕

⟨⟨⟨ (i) $\Rightarrow$ (ii) Sind zwei Argumente gleich, so ist nach Vertauschung

$$\omega(\dots, v, \dots, v, \dots) = -\omega(\dots, v, \dots, v, \dots)$$

und damit Null.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Ist zum Beispiel $v_1 = \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k$, so folgt aus der Multilinearität von ω und (ii)

$$\omega(v_1, \dots, v_k) = \sum_{2 \leq i \leq k} \alpha_i \omega(v_i, v_2, \dots, v_n) = 0.$$

(iii) $\Rightarrow$ (i) Es gilt dann

$$\omega(\dots, v_i + v_j, \dots, v_i + v_j, \dots) = 0.$$

Von den vier aufgrund der Linearität resultierenden Summanden verschwinden die beiden mit gleichen Argumenten, und es bleibt

$$\omega(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots) + \omega(\dots, v_j, \dots, v_i, \dots) = 0.$$

Also ist ω alternierend.

(i) $\Leftrightarrow$ (iv) Dies folgt aus der Definition von $\text{sgn}(\tau)$. $\gggg$

Aufgrund dieses Lemmas ist auf einem Vektorraum der Dimension n jede k -Form mit $k > n$ identisch Null. Es ist also

$$\Lambda^k V = \{0\}, \quad k > \dim V.$$

■ Dachprodukt

Wir benötigen ein Produkt, dass aus einer k -Form und einer l -Form eine $k + l$ -Form bildet. Im Prinzip ist dies kein Problem, da beide Formen zusammen linear in $k + l$ Argumenten sind. Wir müssen aber sicherstellen, dass das Ergebnis auch in allen Argumenten alternierend ist.

Definition Ist $\omega \in \Lambda^k V$ und $\eta \in \Lambda^l V$, so heißt die durch

$$\begin{aligned} (\omega \wedge \eta)(v_1, \dots, v_{k+l}) \\ =: \frac{1}{k!l!} \sum_{\tau \in \mathcal{P}_{k+l}} \text{sgn}(\tau) \omega(v_{\tau_1}, \dots, v_{\tau_k}) \eta(v_{\tau_{k+1}}, \dots, v_{\tau_{k+l}}) \end{aligned}$$

definierte alternierende $k + l$ -Form das *äußere Produkt* oder *Dachprodukt* von ω und η , wobei $\mathcal{P}_{k+l}$ die Gruppe aller Permutationen von $k + l$ Elementen bezeichnet. Dies kann auch geschrieben werden als

$$\begin{aligned} (\omega \wedge \eta)(v_1, \dots, v_{k+l}) \\ = \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_{k,l}} \text{sgn}(\sigma) \omega(v_{\sigma_1}, \dots, v_{\sigma_k}) \eta(v_{\sigma_{k+1}}, \dots, v_{\sigma_{k+l}}), \end{aligned}$$

wobei $\mathcal{P}_{k,l}$ nur diejenigen Permutationen in $\mathcal{P}_{k+l}$ umfasst, wo die ersten k und die letzten l Elemente monoton steigend angeordnet sind. $\rtimes$

⟨⟨⟨ Die Form $\omega \wedge \eta$ ist linear in jedem Argument, da es ω und η sind. Durch Summation über alle möglichen Permutationen τ und Multiplikation mit $\text{sgn}(\tau)$ wird sichergestellt, dass das Ergebnis wieder alternierend in *allen Argumenten* ist. Dabei treten viele Summanden mehrmals auf, und zwar immer dann, wenn verschiedene Permutationen *dieselbe Zerlegung*

$$\{1, \dots, k+l\} = \{\tau_1, \dots, \tau_k\} \cup \{\tau_{k+1}, \dots, \tau_{k+l}\}$$

bewirken. Deren Anzahl ist genau $k!l!$, denn so viele Permutationen der ersten und zweiten Teilmenge unter sich gibt es. Die Division mit diesem Faktor korrigiert also diesen Überschuss. In der zweiten Formulierung tritt dieser Überschuss nicht auf. ⟩⟩⟩

- 2 **Lemma** *Das Dachprodukt ist assoziativ, linear in beiden Faktoren, und antikommutativ. Genauer gilt*

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega, \quad \omega \in \Lambda^k V, \quad \eta \in \Lambda^l V. \quad \times$$

⟨⟨⟨ Linearität und Antikommutativität folgen direkt aus der Definition. Um die Assoziativität zu verifizieren, bemerken wir, dass

$$\begin{aligned} & ((\omega \wedge \eta) \wedge \nu)(v_1, \dots, v_{k+l+m}) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_{k+l,m}} \text{sgn}(\sigma) (\omega \wedge \eta)(v_{\sigma_1}, \dots, v_{\sigma_{k+l}}) \nu(v_{\sigma_{k+l+1}}, \dots, v_{\sigma_{k+l+m}}) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_{k,l,m}} \text{sgn}(\sigma) \omega(v_{\sigma_1}, \dots, v_{\sigma_k}) \eta(v_{\sigma_{k+1}}, \dots, v_{\sigma_{k+l}}) \nu(v_{\sigma_{k+l+1}}, \dots, v_{\sigma_{k+l+m}}). \end{aligned}$$

Genau zu derselben Darstellung gelangen wir aber für

$$(\omega \wedge (\eta \wedge \nu))(v_1, \dots, v_{k+l+m}).$$

Also sind beide Ausdrücke äquivalent. ⟩⟩⟩

- A. Für $a \in \Lambda^0 V = \mathbb{R}$ und $\omega \in \Lambda^k V$ ist

$$a \wedge \omega = a\omega \in \Lambda^k V$$

das übliche Produkt von ω mit dem Skalar a .

- B. Für 1-Formen gilt

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 = -\varphi_2 \wedge \varphi_1,$$

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 = \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge \varphi_1 = \varphi_3 \wedge \varphi_1 \wedge \varphi_2.$$

- C. Für jede k -Form ω mit $k \geq 1$ gilt

$$\omega \wedge \omega = 0.$$

D. Für $\varphi_1, \varphi_2 \in V^*$ und $v_1, v_2 \in V$ ist

$$\begin{aligned} (\varphi_1 \wedge \varphi_2)(v_1, v_2) &= \varphi_1(v_1)\varphi_2(v_2) - \varphi_1(v_2)\varphi_2(v_1) \\ &= \det \begin{pmatrix} \varphi_1(v_1) & \varphi_2(v_1) \\ \varphi_1(v_2) & \varphi_2(v_2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

E. Für $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in V^*$ und $v_1, v_2, v_3 \in V$ ist

$$\begin{aligned} (\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3)(v_1, v_2, v_3) &= \varphi_1(v_1)\varphi_2(v_2)\varphi_3(v_3) + \dots + \varphi_1(v_3)\varphi_2(v_1)\varphi_3(v_2) \\ &\quad - \varphi_1(v_1)\varphi_2(v_3)\varphi_3(v_2) - \dots - \varphi_1(v_2)\varphi_2(v_1)\varphi_3(v_3) \\ &= \det \begin{pmatrix} \varphi_1(v_1) & \varphi_2(v_1) & \varphi_3(v_1) \\ \varphi_1(v_2) & \varphi_2(v_2) & \varphi_3(v_2) \\ \varphi_1(v_3) & \varphi_2(v_3) & \varphi_3(v_3) \end{pmatrix}. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

■ Basisdarstellungen

Eine allgemeine k -lineare Form ω auf V ist bereits eindeutig durch ihre Werte auf allen möglichen Kombinationen von Vektoren einer Basis $v_1, \dots, v_n$ von V definiert, also durch ihre **Komponenten**

$$\omega_{\mu_1 \dots \mu_k} := \omega(v_{\mu_1}, \dots, v_{\mu_k}). \quad 1 \leq \mu_1, \dots, \mu_k \leq n.$$

Ist die Form *alternierend*, so reicht bereits die Kenntnis der Komponenten mit

$$1 \leq \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_k \leq n,$$

denn alle anderen ergeben sich hieraus durch Permutationen der Indizes oder sind Null. Die zugehörigen Basisvektoren sind die Dachprodukte $\varphi_{\mu_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{\mu_k}$ gebildet aus der zu $v_1, \dots, v_n$ dualen Basis $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. Denn es ist

$$(\varphi_{\mu_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{\mu_k})(v_{\mu_1}, \dots, v_{\mu_k}) = 1,$$

während diese Form auf allen anderen Kombinationen von Basisvektoren verschwindet, die keine Permutation dieser Argumente darstellen.

3 Satz Ist $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V und $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ die dazu duale Basis von V^* , so besitzt jede alternierende k -Form ω auf V die eindeutige Darstellung

$$\omega = \sum_{1 \leq \mu_1 < \dots < \mu_k \leq n} \omega_{\mu_1 \dots \mu_k} \varphi_{\mu_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{\mu_k}$$

mit den Komponenten $\omega_{\mu_1 \dots \mu_k} = \omega(v_{\mu_1}, \dots, v_{\mu_k})$. $\times$

⟨⟨⟨⟨ Wir haben bereits bemerkt, dass jede Form durch ihre Werte für Argumente $v_{\mu_1}, \dots, v_{\mu_k}$ mit $1 \leq \mu_1 < \dots < \mu_k \leq n$ bestimmt ist und deshalb eine Darstellung der angegebenen Gestalt hat. Außerdem ergibt Anwenden auf $v_{\mu_1}, \dots, v_{\mu_k}$, dass ω nur dann die Nullform ist, wenn alle Komponenten verschwinden. Daher ist die Darstellung auch eindeutig. ⟩⟩⟩⟩

4 **Korollar** Ist $\dim V = n$, so gilt

$$\dim \Lambda^k V = B_k^n := \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k}, \quad k \geq 0. \quad \times$$

⟨⟨⟨⟨ Ist $1 \leq k \leq n$, so gibt es genau B_k^n Möglichkeiten, k Elemente aus einer Menge mit n Elementen auszuwählen, ohne dass es auf die Reihenfolge ankommt. Somit gibt es ebensoviele Basisvektoren von $\Lambda^k V$. Dies ist auch für $k = 0$ korrekt, denn nach Vereinbarung ist $\Lambda^0 V = \mathbb{R}$, und dieser Raum hat die Dimension 1. Es stimmt auch für $k > n$, denn dann ist $\Lambda^k V = \{0\}$, und dieser Raum hat die Dimension 0. ⟩⟩⟩⟩

Im Standardfall $\mathbb{R}^n$ bezeichnet bekanntlich $dx_1, \dots, dx_n$ die duale Basis zur Standardbasis $e_1, \dots, e_n$. Eine alternierende k -Form hat somit eine eindeutige Darstellung

$$\omega = \sum_{1 \leq \mu_1 < \dots < \mu_k \leq n} \omega_{\mu_1 \dots \mu_k} dx_{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx_{\mu_k}.$$

➤ A. Jede alternierende $n-1$ -Form hat die Gestalt

$$\eta = \sum_{k=1}^n a_k dx_1 \wedge \dots \wedge \hat{dx}_k \wedge \dots \wedge dx_n,$$

wobei $\hat{}$ bedeutet, dass dieser Term auszulassen ist.

B. Jede alternierende n -Form hat die Gestalt

$$\omega = a dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n, \quad a \in \mathbb{R}.$$

C. Insbesondere ist $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ gerade die Determinante, aufgefasst als n -lineare Form in den Spalten einer $n \times n$ -Matrix. ◀

■ Adjungierte Abbildung

Eine lineare Abbildung $A: V \rightarrow W$ zwischen zwei Vektorräumen induziert in natürlicher Weise eine lineare Abbildung zwischen den zugehörigen Räumen alternierender Formen, und zwar in umgekehrter Richtung.

- 5 **Definition** Die durch eine lineare Abbildung $A: V \rightarrow W$ induzierte *adjungierte Abbildung*

$$A^*: \Lambda^k W \rightarrow \Lambda^k V, \quad \omega \mapsto A^* \omega$$

ist definiert durch

$$(A^* \omega)(v_1, \dots, v_k) := \omega(Av_1, \dots, Av_k). \quad \times$$

Für $k = 1$ ist dies die adjungierte Abbildung $A^*: W^* \rightarrow V^*$ zwischen den Dualräumen. Aus der Definition ist ersichtlich, dass A^* mit dem Dachprodukt vertauscht: $A^*(\omega \wedge \upsilon) = (A^* \omega) \wedge (A^* \upsilon)$. Für n -Formen gilt außerdem folgendes

- 6 **Lemma** Ist V ein Vektorraum der Dimension n und $A: V \rightarrow V$ linear, so ist

$$A^*: \Lambda^n V \rightarrow \Lambda^n V, \quad A^* \omega = (\det A) \omega$$

genau die Multiplikation mit dem skalaren Faktor $\det A$. $\times$

⟨⟨⟨ Ist $v_1, \dots, v_n$ irgendeine Basis von V , so ist $A^* \omega$ bestimmt durch

$$(A^* \omega)(v_1, \dots, v_n) = \omega(Av_1, \dots, Av_n) = \alpha \omega(v_1, \dots, v_n)$$

mit einer gewissen reellen Zahl α . Stellen wir A bezüglich dieser Basis durch eine $n \times n$ -Matrix (A_{kl}) dar, so geht der mittlere Ausdruck aufgrund der alternierenden Multilinearität von ω über in ein Vielfaches von $\omega(v_1, \dots, v_n)$, wobei der skalare Faktor genau durch die alternierende Summe dargestellt wird, die die Determinante von (A_{kl}) definiert. ⟩⟩⟩

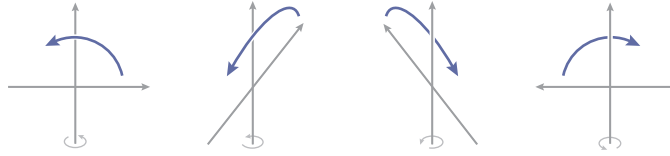
Bemerkung Man kann die Determinante einer Abbildung $A: V \rightarrow V$ auch durch die Gleichung $A^* \omega = (\det A) \omega$ koordinatenfrei *definieren*. Dann ist zu zeigen, dass sie mit der entsprechenden alternierenden Summe in den Komponenten einer Matrixdarstellung von A übereinstimmt. $\rightarrow$

■ Orientierung

Für den Satz von Stokes benötigen wir noch den Begriff der *Orientierung* eines Vektorraumes. Für das eindimensionale Integral bereitet dieser Begriff keine Mühe. Aufgrund der Anordnung der reellen Zahlen ist ein Intervall $[a, b]$ mit $a < b$ immer ›von a nach b ‹ orientiert. Die umgekehrte Richtung ist die dazu entgegengesetzte Orientierung.

Wie ist aber eine Ebene orientiert? Der mathematisch positive Orientierungssinn ist vereinbarungsgemäß gegen den Uhrzeigersinn gerichtet. Doch dies ist keine *Definition* der Orientierung, da sie für sich genommen *sinnlos* ist. Was sich aus der einen Betrachtungsrichtung *gegen* den Uhrzeigersinn bewegt, bewegt sich

Abb 1 Uhrzeigersinn von ›vorne‹ und ›hinten‹



aus der entgegengesetzten Betrachtungsrichtung *mit* dem Uhrzeigersinn Abb 1. Vielmehr kann man nur dann von einem Uhrzeigersinn sprechen, wenn man sich auf eine vorgegebene Orientierung beziehen kann. — Wir lösen dieses kleine Problemchen, indem wir nicht definieren, was *die* Orientierung eines Vektorraums eigentlich ist, sondern indem wir erklären, wann zwei Basen *dieselbe* Orientierung repräsentieren.

Definition Zwei Basen $(v_1, \dots, v_n)$ und $(w_1, \dots, w_n)$ eines reellen Vektorraums heißen *gleichorientiert*, geschrieben

$$(v_1, \dots, v_n) \sim (w_1, \dots, w_n),$$

wenn die Determinante der linearen Transformation Φ mit $\Phi v_i = w_i$ für $1 \leq i \leq n$ positiv ist. $\times$

Aufgrund der Rechenregeln für die Determinante definiert dies eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Basen eines Vektorraumes. Und da die Determinante eines Isomorphismus genau zwei Vorzeichen annehmen kann, definiert diese Äquivalenzrelation genau zwei Äquivalenzklassen, die die beiden *Orientierungen* des Vektorraums genannt werden.

Festgelegt wird eine Orientierung also zum Beispiel durch die Angabe einer Basis $(v_1, \dots, v_n)$. Da es in diesem Fall auf die Reihenfolge der Basisvektoren ankommt, verwenden wir hier die Tupelschreibweise. Die zugehörige Äquivalenzklasse und damit Orientierung von V bezeichnen wir mit

$$[v_1, \dots, v_n].$$

Jede andere Basis $(w_1, \dots, w_n) \in [v_1, \dots, v_n]$ heißt dann *positiv orientiert*, alle anderen Basen heißen *negativ orientiert*. Die negative Orientierung wird auch mit $-[v_1, \dots, v_n]$ bezeichnet.

Auf dem Standardraum $\mathbb{R}^n$ mit der Standardbasis $(e_1, \dots, e_n)$ ist die übliche Orientierung natürlich $[e_1, \dots, e_n]$. Insbesondere ist dies die übliche Orientierung der Ebene, wenn wir von einer Drehung gegen den Uhrzeigersinn sprechen. Anschaulich gesprochen wird dabei der Vektor e_1 auf dem kürzeren Weg in die Richtung des Vektors e_2 gedreht.

- 7 **Lemma** Sei $n = \dim V$ und $\omega \in \Lambda^n V$ nicht die Nullform. Dann sind zwei Basen $(v_1, \dots, v_n)$ und $(w_1, \dots, w_n)$ von V gleich orientiert genau dann, wenn $\omega(v_1, \dots, v_n)$ und $\omega(w_1, \dots, w_n)$ dasselbe Vorzeichen haben. $\times$

⟨⟨⟨ Ist $\Phi: V \rightarrow V$ definiert durch $\Phi v_i = w_i$ für $1 \leq i \leq n$, so ist

$$\begin{aligned}\omega(w_1, \dots, w_n) &= \omega(\Phi v_1, \dots, \Phi v_n) \\ &= \Phi^* \omega(v_1, \dots, v_n) \\ &= \det \Phi \omega(v_1, \dots, v_n).\end{aligned}$$

Somit ist $\det \Phi > 0$ genau dann, wenn $\omega(v_1, \dots, v_n)$ und $\omega(w_1, \dots, w_n)$ dasselbe Vorzeichen haben. $\rangle\rangle\rangle$

Für die Anschauung nützlich ist folgende *topologische Charakterisierung* einer Orientierung, die sich aus dem Deformationslemma 21.12 ergibt.

- 8 **Lemma** Sei V ein n -dimensionaler Vektorraum mit Orientierung $[v_1, \dots, v_n]$. Dann sind diejenigen Basen $(w_1, \dots, w_n)$ positiv orientiert, die sich als Basis stetig in $(v_1, \dots, v_n)$ überführen lassen. Das heißt, es gibt eine stetige Familie von Isomorphismen

$$\Phi_t: V \rightarrow V, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

so dass $\Phi_0 = \text{id}$ und $\Phi_1 v_i = w_i$ für $1 \leq i \leq n$. $\times$

Gemäß unserer Definition besitzt der triviale Vektorraum $\{0\}$ nur eine *einzigste* Orientierung, da es überhaupt keine Basis von $\{0\}$ gibt. Dies ist aber für unseren Gebrauch nicht sinnvoll. Daher treffen wir noch folgende

Vereinbarung Der triviale Vektorraum $\{0\}$ besitzt die beiden Orientierungen $+1$ und -1 . $\times$

22.2

Differenzialformen

Eine 1-Form ist eine Abbildung $\alpha: V \hookrightarrow V^*$, die jedem Punkt x im Definitionsbereich eine Linearform $\alpha(x)$ in V^* zuordnet. Entsprechendes definieren wir jetzt für k -Formen.

Definition Eine *Differenzialform vom Grad k* , kurz *k -Form*, ist eine Abbildung

$$\omega: V \hookrightarrow \Lambda^k V, \quad x \mapsto \omega(x),$$

die jedem Punkt im Definitionsbereich eine alternierende k -Form zuordnet. $\times$

Im Standardfall $\mathbb{R}^n$ hat eine k -Form ω somit eine Darstellung ₃

$$\omega(x) = \sum_{1 \leq \mu_1 < \dots < \mu_k \leq n} \omega_{\mu_1 \dots \mu_k}(x) dx_{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx_{\mu_k}$$

mit Komponentenfunktionen $\omega_{\mu_1 \dots \mu_k}(x) = \omega(x)(e_{\mu_1}, \dots, e_{\mu_k})$. Eine solche Form heißt *stetig* respektive *von der Klasse C^r* , wenn alle Komponentenfunktionen stetig respektive von der Klasse C^r sind. Die Regularitätseigenschaften von Formen werden hier allerdings keine besondere Rolle spielen. Der Einfachheit nehmen wir an, dass alle *unendlich oft differenzierbar* sind. Mit $\Omega^k(U)$ bezeichnen wir den Raum solcher k -Formen auf einem Gebiet U im $\mathbb{R}^n$.

► A. Eine 0-Form $f \in \Omega^0(U)$ ist eine C^∞ -Funktion

$$f: U \rightarrow \mathbb{R}.$$

B. Ist $f \in \Omega^0(U)$, so ist ihr übliches Differenzial

$$df: U \rightarrow V^*, \quad df(x) = \sum_{1 \leq \mu \leq n} \partial_\mu f(x) dx_\mu$$

eine 1-Form in $\Omega^1(U)$.

C. Eine $n - 1$ -Form auf dem $\mathbb{R}^n$ hat die Gestalt

$$\eta = \sum_{k=1}^n f_k(x) dx_1 \wedge \dots \wedge d\hat{x}_k \wedge \dots \wedge dx_n. \quad \blacktriangleleft$$

■ Transformationsregel

Sei $f: V \hookrightarrow W$ eine differenzierbare Abbildung zwischen zwei Vektorräumen, wobei *differenzierbar* für *unendlich oft differenzierbar* stehen soll. In jedem Punkt ihres Definitionsbereichs definiert ihre Ableitung die *Tangentialabbildung*

$$f_*: V \rightarrow W, \quad v \mapsto w = Df(x)v.$$

Diese induziert eine adjungierte Abbildung ₅

$$f^*: \Lambda^k W \rightarrow \Lambda^k V, \quad \omega \mapsto f^* \omega$$

der entsprechenden Räume von k -Formen. Verfahren wir so in jedem Punkt, erhalten wir folgende

9 **Transformationsregel** Sei $U \subset V$ ein Gebiet und $f: U \rightarrow W$ differenzierbar.

Dann ist

$$f^*: \Omega^k(W) \rightarrow \Omega^k(U), \quad \omega \mapsto v = f^* \omega$$

definiert durch

$$v(v_1, \dots, v_k) = (\omega \circ f)(f_* v_1, \dots, f_* v_k).$$

✕

Man nennt $f^*\omega$ den *pull back* von ω oder die durch f *zurückgeholte Form*. Punktweise ist sie gegeben durch

$$(f^*\omega)(x)(v_1, \dots, v_k) = \omega(f(x))(f_*(x)v_1, \dots, f_*(x)v_k).$$

Diese Operation vertauscht offensichtlich mit Addition und Multiplikation, also

$$f^*(\omega + \tilde{\omega}) = f^*\omega + f^*\tilde{\omega}, \quad f^*(\omega \wedge \nu) = f^*\omega \wedge f^*\nu.$$

Bemerkung Allgemein verwendet man die Bezeichnungen f_* und f^* für sogenannte *kovariante* und *kontravariante Funktoren*, die einer Abbildung f zugeordnet sind und für die gilt

$$id_* = id, \quad (f \circ g)_* = f_* \circ g_*$$

respektive

$$id^* = id, \quad (f \circ g)^* = g^* \circ f^*.$$

Der *push forward* $f_* = Df$ für Tangentialvektoren und der *pull back* f^* für Differenzialformen sind typische Beispiele. $\rightarrow$

10 $\rightarrow$ A. Für eine 0-Form g ist der pull back die Komposition:

$$f^*g = g \circ f.$$

B. Für $f: \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ gilt

$$f^*dx_\mu = df_\mu, \quad 1 \leq \mu \leq m,$$

wobei f_μ die μ -te Komponente von f bezeichnet. Denn wegen der Unabhängigkeit von dx_μ vom Punkt ist

$$(f^*dx_\mu)(v) = (dx_\mu \circ f)(f_*v) = dx_\mu(f_*v).$$

Der letzte Ausdruck ist gerade die μ -te Komponente des Vektors f_*v , also

$$dx_\mu(f_*v) = (f_*v)_\mu = Df_\mu(v) = df_\mu(v).$$

C. Für $f: \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ gilt

$$f^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) = (\det Df)(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n).$$

Denn in jedem Punkt ist $f_* = Df$ eine lineare Transformation des $\mathbb{R}^n$ in sich. Da $\omega = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ nicht vom Ort abhängt, gilt deshalb

$$f^*\omega = (Df)^*\omega = (\det Df)\omega. \quad \leftarrow$$

■ Äußere Ableitung

Die *äußere* oder *Cartansche Ableitung* ordnet einer k -Form eine $k + 1$ -Form zu. Wir kennen diesen Operator bisher in der Form des Differenzials einer skalaren Funktion, das einer 0-Form eine 1-Form zuordnet. Nun definieren wir ihn für beliebige Formen, wobei wir uns auf den Standardfall beschränken.

Definition Die *äußere Ableitung* oder das *Differenzial* einer k -Form

$$\omega = \sum_{1 \leq \mu_1 < \dots < \mu_k \leq n} \omega_{\mu_1 \dots \mu_k} dx_{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx_{\mu_k}$$

mit $k \geq 1$ ist die $k + 1$ -Form

$$d\omega = \sum_{1 \leq \mu_1 < \dots < \mu_k \leq n} d\omega_{\mu_1 \dots \mu_k} \wedge dx_{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx_{\mu_k}.$$

Das Differenzial einer 0-Form ist ihr übliches Differenzial als Funktion. $\times$

Von jeder Komponentenfunktion wird also das Funktionsdifferenzial gebildet und mit der zugehörigen Basisform durch das Dachprodukt verknüpft. Ausgeschrieben ergibt dies

$$d\omega = \sum_{1 \leq \mu_1 < \dots < \mu_k \leq n} \sum_{1 \leq \lambda \leq n} \partial_\lambda \omega_{\mu_1 \dots \mu_k} dx_\lambda \wedge dx_{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx_{\mu_k}.$$

11 $\Rightarrow$ A. Das Differenzial einer 1-Form $\alpha = f dx + g dy$ auf dem $\mathbb{R}^2$ ist

$$d\alpha = f_y dy \wedge dx + g_x dx \wedge dy = (g_x - f_y) dx \wedge dy.$$

B. Das Differenzial einer 1-Form $\alpha = \sum_{1 \leq \mu \leq n} \alpha_\mu dx_\mu$ auf dem $\mathbb{R}^n$ ist

$$d\alpha = \sum_{1 \leq \mu \leq n} \sum_{1 \leq \lambda \leq n} \partial_\lambda \alpha_\mu dx_\lambda \wedge dx_\mu = \sum_{1 \leq \lambda < \mu \leq n} (\partial_\lambda \alpha_\mu - \partial_\mu \alpha_\lambda) dx_\lambda \wedge dx_\mu.$$

C. Das Differenzial von $\omega = f_1 dx_2 \wedge dx_3 + f_2 dx_3 \wedge dx_1 + f_3 dx_2 \wedge dx_3$ auf dem $\mathbb{R}^3$ ist

$$\begin{aligned} d\omega &= (\partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 + \partial_3 f_3) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\ &= (\operatorname{div} f) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3. \end{aligned} \quad \Leftarrow$$

12 **Rechenregeln** Für k -Formen $\omega, \tilde{\omega}$ und l -Formen η gilt

- (i) $d(\omega + \tilde{\omega}) = d\omega + d\tilde{\omega}$,
- (ii) $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$,
- (iii) $d(d\omega) = 0$,
- (iv) $f^*(d\omega) = d(f^*\omega)$. $\times$

⟨⟨⟨ (i) Das ist einfach.

(ii) Der allgemeine Fall lässt sich aufgrund der Additivität zurückführen auf $\omega = f\tilde{\omega}$ und $\eta = g\tilde{\eta}$, wobei $\tilde{\omega} = dx_{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx_{\mu_k}$ und $\tilde{\eta} = dx_{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx_{\nu_l}$. Dann ist

$$\omega \wedge \eta = (fg) \hat{\omega} \wedge \hat{\eta},$$

und mit $d(fg) = gdf + f dg$ erhalten wir definitionsgemäß

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta) &= d(fg) \wedge \hat{\omega} \wedge \hat{\eta} \\ &= g df \wedge \hat{\omega} \wedge \hat{\eta} + f dg \wedge \hat{\omega} \wedge \hat{\eta} \\ &= (df \wedge \hat{\omega}) \wedge (g \hat{\eta}) + (-1)^k (f \hat{\omega}) \wedge (dg \wedge \hat{\eta}) \\ &= d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta. \end{aligned}$$

(iii) Definitionsgemäß ist

$$d\omega = \sum_{\mu_1 < \dots < \mu_k} \sum_{1 \leq \lambda \leq n} \partial_\lambda \omega_{\mu_1 \dots \mu_k} dx_\lambda \wedge dx_{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx_{\mu_k}$$

und

$$d(d\omega) = \sum_{\mu_1 < \dots < \mu_k} \sum_{1 \leq \kappa, \lambda \leq n} \partial_\kappa \partial_\lambda \omega_{\mu_1 \dots \mu_k} dx_\kappa \wedge dx_\lambda \wedge dx_{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx_{\mu_k}.$$

In dieser Summe verschwinden alle Terme mit $\kappa = \lambda$. Ansonsten kombinieren sich jeweils zwei Terme zu Null, nämlich

$$\begin{aligned} &\partial_\kappa \partial_\lambda \omega_{\mu_1 \dots \mu_k} dx_\kappa \wedge dx_\lambda \wedge dx_{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx_{\mu_k} \\ &\quad + \partial_\lambda \partial_\kappa \omega_{\mu_1 \dots \mu_k} dx_\lambda \wedge dx_\kappa \wedge dx_{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx_{\mu_k} \\ &= \partial_\kappa \partial_\lambda \omega_{\mu_1 \dots \mu_k} (dx_\kappa \wedge dx_\lambda + dx_\lambda \wedge dx_\kappa) \wedge dx_{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx_{\mu_k} = 0. \end{aligned}$$

Somit ist die gesamte Summe Null.

(iv) Für eine o-Form g handelt es sich um die Kettenregel, denn

$$\begin{aligned} f^*(dg)(\nu) &= (dg \circ f)(f_*\nu) \\ &= (Dg \circ f)(Df(\nu)) \\ &= D(g \circ f)(\nu) = d(f^*g)(\nu). \end{aligned}$$

Wir nehmen jetzt induktiv an, dass die Gleichung bereits für k -Formen verifiziert ist. Es genügt dann, eine $k+1$ -Form der Gestalt $\omega \wedge dx_\lambda$ zu betrachten. Mit der Produktregel (ii) und $d(dx_\lambda) = 0$ ist dann

$$\begin{aligned} f^*(d(\omega \wedge dx_\lambda)) &= f^*(d\omega \wedge dx_\lambda) \\ &= f^*d\omega \wedge f^*dx_\lambda \\ &= df^*\omega \wedge f^*dx_\lambda, \end{aligned}$$

wobei die Induktionsannahme beim Übergang zur letzten Zeile zur Anwendung kam. Auf der anderen Seite ist wegen $d(df_\lambda) = 0$ auch

$$\begin{aligned} d(f^*(\omega \wedge dx_\lambda)) &= d(f^*\omega \wedge f^*dx_\lambda) \\ &= d(f^*\omega \wedge df_\lambda) \\ &= df^*\omega \wedge df_\lambda. \end{aligned}$$

Also ist $f^*d(\omega \wedge dx_\lambda) = df^*(\omega \wedge dx_\lambda)$, und wir sind fertig. $\ggg$

Bemerkung Wir haben die äußere Ableitung einer k -Form durch Bezug auf Standardkoordinaten definiert. Dies erscheint etwas willkürlich, und es stellt sich die Frage, ob es nicht auch ohne Koordinaten geht. In der Tat ist eine äußere Ableitung

$$d: \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k+1}(U), \quad k \geq 0,$$

durch die folgenden drei Eigenschaften vollständig und eindeutig bestimmt:

(C-1) *Differenzialeigenschaft:* Für $f \in \Omega^0(U)$ ist df das Differenzial.

(C-2) *Produktregel:* Für $\omega \in \Omega^k(U)$ ist

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta.$$

(C-3) *Komplexeigenschaft:* Es ist $d \circ d = 0$.

Für einen Beweis siehe Kapitel 8 in JÄNISCH, *Vektoranalysis*. $\rightarrow$

■ Geschlossene und exakte Formen

Definition Eine Differenzialform ω heißt *geschlossen*, wenn $d\omega = 0$. Sie heißt *exakt*, wenn $\omega = d\eta$ mit einer weiteren Differenzialform η . $\times$

Geschlossene 1-Formen $\alpha = \sum \alpha_\mu dx_\mu$ hatten wir bereits mithilfe der Integrabilitätsbedingung 18.11

$$\partial_\lambda \alpha_\mu = \partial_\mu \alpha_\lambda, \quad 1 \leq \lambda, \mu \leq n$$

definiert. Dies ist aber äquivalent mit

$$d\alpha = \sum_{1 \leq \lambda < \mu \leq n} (\partial_\lambda \alpha_\mu - \partial_\mu \alpha_\lambda) dx_\lambda \wedge dx_\mu = 0,$$

also der Geschlossenheit von α im Sinne der jetzigen Definition.

Wegen $d \circ d = 0$ 12 ist jede exakte Differenzialform auch geschlossen. Die Frage ist, ob umgekehrt jede geschlossene Form auch exakt ist. Für 1-Formen gab das Lemma von Poincaré 18.14 eine positive Antwort auf sternförmigen Gebieten. Tatsächlich gilt dieses Lemma für Differenzialformen beliebigen Grades.

- 13 **Lemma von Poincaré** Jede geschlossene Differenzialform auf einem sternförmigen Gebiet ist exakt. ✕

⟨⟨⟨⟨ Der Beweis kann beim ersten Lesen übersprungen werden, da wir dieses Ergebnis nur für eine Notiz über Vektorpotentiale ^{23.26} benötigen. — Wir ordnen jeder k -Form ω eine $k-1$ -Form $I\omega$ so zu, dass $I\omega = 0$ für $\omega = 0$ und

$$\omega = I(d\omega) + d(I\omega).$$

Ist ω geschlossen, so ist $I\omega$ eine $k-1$ -Form mit $d(I\omega) = \omega$, und wir sind fertig. Sei

$$\omega = \sum_{\mu_1 < \dots < \mu_k} \omega_{\mu_1 \dots \mu_k} dx_{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx_{\mu_k}$$

eine beliebige k -Form. Wir können annehmen, dass ihr Definitionsbereich sternförmig zum Nullpunkt ist. Wir definieren dann

$$(I\omega)(x) = \sum_{\mu_1 < \dots < \mu_k} \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \left(\int_0^1 t^{k-1} \omega_{\mu_1 \dots \mu_k}(tx) dt \right) x_{\mu_i} dx_{\mu_1} \wedge \dots \wedge d\hat{x}_{\mu_i} \wedge \dots \wedge dx_{\mu_k},$$

wobei das Dach wie üblich bedeutet, dass dieser Term auszulassen ist.

Nun folgt etwas Rechnerei. Da wir aufgrund der Glattheit der Komponenten unter dem Integral differenzieren dürfen, ist

$$\begin{aligned} d(I\omega) &= \sum_{\mu_1 < \dots < \mu_k} k \left(\int_0^1 t^{k-1} \omega_{\mu_1 \dots \mu_k}(tx) dt \right) dx_{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx_{\mu_k} \\ &\quad + \sum_{\mu_1 < \dots < \mu_k} \sum_{i=1}^k \sum_{l=1}^n (-1)^{i-1} \left(\int_0^1 t^k \partial_l \omega_{\mu_1 \dots \mu_k}(tx) dt \right) x_{\mu_i} dx_l \wedge dx_{\mu_1} \wedge \dots \wedge d\hat{x}_{\mu_i} \wedge \dots \wedge dx_{\mu_k}. \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$d\omega = \sum_{\mu_1 < \dots < \mu_k} \sum_{l=1}^n \partial_l \omega_{\mu_1 \dots \mu_k} dx_l \wedge dx_{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx_{\mu_k}.$$

Wenden wir hierauf dieselbe Konstruktion an, so erhalten wir

$$\begin{aligned} I(d\omega) &= \sum_{\mu_1 < \dots < \mu_k} \sum_{l=1}^n \left(\int_0^1 t^k \partial_l \omega_{\mu_1 \dots \mu_k}(tx) dt \right) x_l dx_{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx_{\mu_k} \\ &\quad - \sum_{\mu_1 < \dots < \mu_k} \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \left(\int_0^1 t^k \partial_l \omega_{\mu_1 \dots \mu_k}(tx) dt \right) x_{\mu_i} dx_l \wedge dx_{\mu_1} \wedge \dots \wedge d\hat{x}_{\mu_i} \wedge \dots \wedge dx_{\mu_k}. \end{aligned}$$

Addieren wir $d(I\omega)$ und $I(d\omega)$, so annullieren sich die dreifachen Summen, und wir erhalten

$$\begin{aligned}
 & d(I\omega) + I(d\omega) \\
 &= \sum_{\mu_1 < \dots < \mu_k} k \left(\int_0^1 t^{k-1} \omega_{\mu_1 \dots \mu_k}(tx) dt \right) dx_{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx_{\mu_k} \\
 &\quad + \sum_{\mu_1 < \dots < \mu_k} \sum_{l=1}^n \left(\int_0^1 t^k x_l \partial_l \omega_{\mu_1 \dots \mu_k}(tx) dt \right) dx_{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx_{\mu_k} \\
 &= \sum_{\mu_1 < \dots < \mu_k} \left(\int_0^1 \partial_t [t^k \omega_{\mu_1 \dots \mu_k}(tx)] dt \right) dx_{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx_{\mu_k} \\
 &= \sum_{\mu_1 < \dots < \mu_k} \omega_{\mu_1 \dots \mu_k} dx_{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx_{\mu_k} \\
 &= \omega.
 \end{aligned}$$

Damit ist der Beweis vollständig. $\gggg$

22.3

Ketten

Wir spezifizieren nun die geometrischen Objekte, über die wir Differenzialformen integrieren. Die Begriffsbildung mag etwas umständlich erscheinen. Tatsächlich handelt es sich nur um einen technischen Zwischenschritt zum allgemeinen Satz von Stokes 23.9. — Sei $\mathbb{I} := [0, 1]$ und damit

$$\mathbb{I}^n = [0, 1]^n, \quad n \geq 1.$$

Außerdem sei $\mathbb{I}^0 := \{0\}$.

Definition Sei $n \geq 0$. Der *Standard- n -Würfel* ist die triviale Abbildung

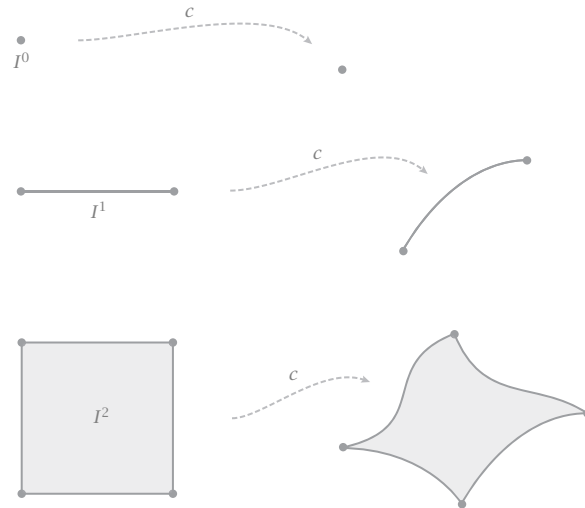
$$I^n : \mathbb{I}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad I^n(x) = x.$$

Ein allgemeiner *n -Würfel* in einem Gebiet $U \subset \mathbb{R}^m$ ist eine stetige Abbildung

$$c : \mathbb{I}^n \rightarrow U.$$

Eine *n -Kette* in U ist eine endliche Linearkombination $\lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_r c_r$ von n -Würfeln $c_1, \dots, c_r$ mit ganzzahligen Koeffizienten $\lambda_1, \dots, \lambda_r$. $\times$

Es ist also $\mathbb{I}^n$ eine Menge und I^n eine Abbildung.

Abb 2 Standard- und allgemeine n -Würfel für $n = 0, 1, 2$ 

- A. Ein 0-Würfel $c: \{0\} \rightarrow U$ ist ein Punkt in U .
 B. Ein 1-Würfel $c: [0, 1] \rightarrow U$ ist eine stetige Kurve in U .
 C. Jeder n -Würfel c ist eine n -Kette, wenn wir c mit $1c$ identifizieren. ◀

Ketten treten in natürlicher Weise als *Ränder* von Würfeln auf. Betrachte zunächst den Standardwürfel. Sein Rand ist eine Kette aus $n - 1$ -Würfeln, die seine Seiten beschreiben und mit Blick auf den Fundamentalsatz mit den geeigneten Vorzeichen versehen sind.

Definition Für $1 \leq i \leq n$ und $\alpha \in \{0, 1\}$ heißt

$$I_{i,\alpha}^n : \mathbb{I}^{n-1} \rightarrow \mathbb{I}^n, \quad x \mapsto (x_1, \dots, x_{i-1}, \alpha, x_i, \dots, x_{n-1})$$

die *i, α -Seite* von I^n . Die $n - 1$ -Kette

$$\partial I^n := \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=0}^1 (-1)^{i+\alpha} I_{i,\alpha}^n$$

heißt der *Rand* von I^n . Der Rand einer 0-Kette ist 0. ✕

Definition Der *Rand* eines beliebigen n -Würfels $c: \mathbb{I}^n \rightarrow U$ ist

$$\partial c := \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=0}^1 (-1)^{i+\alpha} c_{i,\alpha},$$

wobei $c_{i,\alpha} := c \circ I_{i,\alpha}^n$ die i, α -Seite von c bezeichnet. Entsprechend ist

$$\partial(\lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_r c_r) = \lambda_1 \partial c_1 + \dots + \lambda_r \partial c_r$$

der Rand einer allgemeinen n -Kette. $\times$

Der Rand des Randes von I^2 ist 0, da jeder Eckpunkt einmal als Endpunkt einer Seite mit $+1$ und als Anfangspunkt der nächsten Seite mit -1 gewichtet wird, in der Summe also den Faktor 0 erhält. Dies gilt ganz allgemein für jede Kette:

14 Satz Der Randoperator ∂ hat die Komplexeigenschaft

$$\partial \circ \partial = 0. \quad \times$$

Für jede n -Kette c gilt also $\partial(\partial c) = 0$.

⟨⟨⟨⟨ Es genügt, einen einzelnen n -Würfel zu betrachten. Was für ihn gilt, gilt dann auch für jede n -Kette.

Betrachte zunächst die j, β -Seite der i, α -Seite von I^n ,

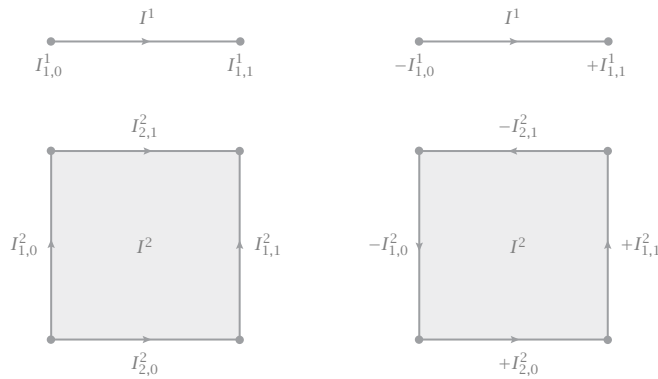
$$(I_{i,\alpha}^n)_{j,\beta} : \mathbb{I}^{n-2} \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

wobei wir $i \leq j$ annehmen können. Für $x \in \mathbb{I}^{n-2}$ ist definitionsgemäß

$$\begin{aligned} (I_{i,\alpha}^n)_{j,\beta}(x) &= I_{i,\alpha}^n(I_{j,\beta}^{n-1}(x)) \\ &= I_{i,\alpha}^n(x_1, \dots, \beta_j, \dots, x_{n-2}) \\ &= (x_1, \dots, \alpha_i, \dots, \beta_{j+1}, \dots, x_{n-2}), \end{aligned}$$

wobei die Indizes an α und β angeben, an welchen Positionen die Einträge stehen. Man beachte, dass β wegen $i \leq j$ von der j -ten an die $j+1$ -te Stelle verschoben

Abb 3 Seiten und Rand von I^1 und I^2



wird. Andererseits ist aber auch

$$\begin{aligned}(I_{j+1,\beta}^n)_{i,\alpha}(x) &= I_{j+1,\beta}^n(I_{i,\alpha}^{n-1}(x)) \\ &= I_{j+1,\beta}^n(x_1, \dots, \alpha_i, \dots, x_{n-2}) \\ &= (x_1, \dots, \alpha_i, \dots, \beta_{j+1}, \dots, x_{n-2}).\end{aligned}$$

Also gilt

$$(I_{i,\alpha}^n)_{j,\beta} = (I_{j+1,\beta}^n)_{i,\alpha}.$$

Dasselbe gilt dann auch für einen beliebigen n -Würfel c , also

$$(c_{i,\alpha})_{j,\beta} = (c_{j+1,\beta})_{i,\alpha}, \quad i \leq j.$$

In der Randdarstellung

$$\partial(\partial c) = \partial \left(\sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=0}^1 (-1)^{i+\alpha} c_{i,\alpha} \right) = \sum_{i,j=1}^n \sum_{\alpha,\beta=0}^1 (-1)^{i+\alpha+j+\beta} (c_{i,\alpha})_{j,\beta}$$

existiert daher zu jedem Summanden genau ein weiterer Summand mit entgegengesetztem Vorzeichen. Die gesamte Summe verschwindet deshalb, so dass

$$\partial(\partial c) = 0. \quad \gggg$$

22.4

Der Fundamentalsatz

Jetzt geht es noch darum, Differenzialformen über Würfel zu integrieren. Genauer wird eine n -Form immer über einen n -Würfel integriert, nicht über einen Würfel einer anderen Dimension.

Zunächst wieder einige Definitionen. Ist ω eine n -Form auf $\mathbb{I}^n$, so ist

$$\omega = f \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

mit einer differenzierbaren¹ Funktion $f: \mathbb{I}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Wir definieren dann ›klassisch‹

$$\int_{\mathbb{I}^n} \omega = \int_{\mathbb{I}^n} f \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n := \int_{\mathbb{I}^n} f \, d\lambda_n$$

als das Lebesgueintegral der Koeffizientenfunktion f über $\mathbb{I}^n$ bezüglich des Volumenmaßes $d\lambda_n$. Das Integral über einen allgemeinen Würfel wird darauf zurückgeführt.

¹ Stetig würde hier auch genügen.

Definition Sei ω eine stetige n -Form auf einem Gebiet U . Für einen differenzierbaren n -Würfel c in U ist dann

$$\int_c \omega := \int_{\mathbb{I}^n} c^* \omega.$$

Für eine differenzierbare n -Kette $c = \lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_r c_r$ ist entsprechend

$$\int_c \omega := \lambda_1 \int_{c_1} \omega + \dots + \lambda_r \int_{c_r} \omega.$$

Für $n = 0$ sei außerdem $\int_c \omega := \omega(c(0))$. $\times$

► A. Für den Standardwürfel I^n und $\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ ist dies wieder die vorher getroffene Vereinbarung:

$$\begin{aligned} \int_{I^n} \omega &= \int_{I^n} f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= \int_{\mathbb{I}^n} (I^n)^* (f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) \\ &= \int_{\mathbb{I}^n} f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \int_{\mathbb{I}^n} f d\lambda_n. \end{aligned}$$

B. Im Fall $n = 1$ handelt es sich um das bekannte Integral einer 1-Form

$$\alpha = \sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i dx_i$$

entlang einer Kurve $c: \mathbb{I} \rightarrow U$:

$$\int_c \alpha = \int_{\mathbb{I}} c^* \alpha = \int_{\mathbb{I}} \sum_{i=1}^n \alpha_i(c(t)) \dot{c}_i(t) dt = \int_{\mathbb{I}} \langle \alpha \circ c, \dot{c} \rangle dt.$$

C. Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Für jeden stetig differenzierbaren 1-Würfel $c: \mathbb{I} \rightarrow [a, b]$ gilt dann

$$\int_c f dx = \int_{\mathbb{I}} c^* (f dx) = \int_0^1 (f \circ c) c' dt = \int_{c(0)}^{c(1)} f dt$$

aufgrund der Substitutionsregel. ◀

Wir haben jetzt alles beisammen, um den Satz von Stokes für Ketten zu formulieren und auch zu beweisen.

- 15 **Fundamentalsatz (Satz von Stokes)** Ist ω eine differenzierbare $n-1$ -Form auf einem Gebiet U und c eine differenzierbare n -Kette in U , so gilt

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega. \quad \times$$

⟨⟨⟨⟨ Zuerst betrachten wir eine $n - 1$ -Form auf dem Standardwürfel. Eine solche Form hat im $\mathbb{R}^n$ die Basisdarstellung

$$\omega = \sum_{\mu=1}^n f_{\mu} \omega_{\mu}, \quad \omega_{\mu} := dx_1 \wedge \dots \wedge d\hat{x}_{\mu} \wedge \dots \wedge dx_n,$$

wobei das Dach bedeutet, dass dieser Term *auszulassen* ist. Aufgrund der Linearität der Integrale können wir uns weiter auf eine solche Form

$$\omega = f \omega_{\mu}$$

beschränken. Dessen Integral über $I_{i,\alpha}^n$ verschwindet für $i \neq \mu$, weil dx_i verschwindet, wenn die i -te Koordinate konstant ist. Für $i = \mu$ erhalten wir

$$\int_{I_{\mu,\alpha}^n} f \omega_{\mu} = \int_{\mathbb{I}^{n-1}} (I_{\mu,\alpha}^n)^*(f \omega_{\mu}) = \int_{\mathbb{I}^{n-1}} f(\dots, \alpha_{\mu}, \dots) d\lambda_{n-1}.$$

Summieren wir über alle Seiten von I^n , so leisten also nur die beiden μ -Seiten einen Beitrag, so dass

$$\begin{aligned} \int_{\partial I^n} f \omega_{\mu} &= \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=0}^1 (-1)^{i+\alpha} \int_{I_{i,\alpha}^n} f \omega_{\mu} \\ &= (-1)^{\mu+1} \int_{I_{\mu,1}^n} f \omega_{\mu} + (-1)^{\mu} \int_{I_{\mu,0}^n} f \omega_{\mu} \\ &= (-1)^{\mu-1} \int_{\mathbb{I}^{n-1}} [f(\dots, 1_{\mu}, \dots) - f(\dots, 0_{\mu}, \dots)] d\lambda_{n-1}. \end{aligned}$$

Aufgrund des Fundamentalsatzes der Differenzial- und Integralrechnung *einer* Variablen ist

$$f(\dots, 1_{\mu}, \dots) - f(\dots, 0_{\mu}, \dots) = \int_{\mathbb{I}^1} \partial_{\mu} f d\lambda_1,$$

wobei nur in der μ -ten Koordinate integriert wird. Zusammen mit dem Satz von Fubini ergibt sich somit

$$\int_{\partial I^n} f \omega_{\mu} = (-1)^{\mu-1} \int_{\mathbb{I}^n} \partial_{\mu} f d\lambda_n = (-1)^{\mu-1} \int_{I^n} \partial_{\mu} f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Nun bemerken wir noch, dass

$$\begin{aligned} d(f \omega_{\mu}) &= df \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge d\hat{x}_{\mu} \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= \partial_{\mu} f dx_{\mu} \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge d\hat{x}_{\mu} \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= (-1)^{\mu-1} \partial_{\mu} f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$\int_{\partial I^n} f \omega_{\mu} = \int_{I^n} d(f \omega_{\mu}).$$

Der Satz von Stokes ist damit für den Standardwürfel bewiesen.

Für einen allgemeinen n -Würfel c ist mit dem eben Bewiesenen und der Definition des Randes von I^n

$$\begin{aligned} \int_c d\omega &= \int_{I^n} c^*(d\omega) = \int_{I^n} d(c^*\omega) \\ &= \int_{\partial I^n} c^*\omega = \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=0}^1 (-1)^{i+\alpha} \int_{I_{i,\alpha}^n} c^*\omega. \end{aligned}$$

Für das letzte Integral erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{I_{i,\alpha}^n} c^*\omega &= \int_{\mathbb{I}^{n-1}} (I_{i,\alpha}^n)^* c^*\omega \\ &= \int_{\mathbb{I}^{n-1}} (c \circ I_{i,\alpha}^n)^*\omega = \int_{\mathbb{I}^{n-1}} c_{i,\alpha}^*\omega = \int_{c_{i,\alpha}} \omega. \end{aligned}$$

Also ist

$$\int_c d\omega = \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=0}^1 (-1)^{i+\alpha} \int_{c_{i,\alpha}} \omega = \int_{\partial c} \omega.$$

Der Satz von Stokes ist damit auch für einen allgemeinen n -Würfel bewiesen.

Für eine beliebige n -Kette $c = \lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_r c_r$ ist dann alles klar:

$$\int_c d\omega = \sum_{1 \leq i \leq r} \lambda_i \int_{c_i} d\omega = \sum_{1 \leq i \leq r} \lambda_i \int_{\partial c_i} \omega = \int_{\partial c} \omega.$$

Damit ist der Satz von Stokes im $\mathbb{R}^n$ vollständig bewiesen. $\gggg$

Der vorangehende Beweis ist wenig mehr als eine elementare Rechnung. Dies liegt aber daran, dass alles Wesentliche sich bereits in den Definitionen der zentralen Begriffe findet. Dies ist überhaupt ein Merkmal guter Definitionen: Wichtige Sätze lassen sich mit ihnen konzipieren und oft auch beweisen. Nichtsdestotrotz hat der Satz von Stokes weit reichende Konsequenzen und Anwendungen, von denen wir allerdings hier nur wenige andeuten werden.