24

L^p-Räume

Die Entwicklung des Lebesgueintegrals führte zum Raum $\mathcal{L}^n(\mu)$ aller lebesgue-integrierbaren Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$. Wir gehen nun einen Schritt weiter und betrachten die Räume derjenigen μ-messbaren Funktionen, für die

$$\|f\|_p := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}$$

endlich ist. Für $1 \leqslant p < \infty$ erhält man so normierte Vektorräume $L^p(\mu)$, wenn man noch Funktionen identifiziert, die μ-fast überall gleich sind.

Es stellt sich heraus, dass diese Vektorräume *vollständig*, also *Banachräume* sind. Diese L^p-Räume spielen in der höheren Analysis diejenige zentrale Rolle, die die reellen Zahlen in der klassischen Analysis spielen. In diesem Räumen haben auch Faltungen und Glättungen ihren natürlichen Platz.

24.1 Definition der Räume

Sei $\mathcal{M}^n(\mu)$ wieder der Raum aller bezüglich eines Maßes μ messbaren Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$. Wir definieren darin Unterräume von Funktionen, die durch eine Integrierbarkeitsbedingung charakterisiert sind.

Für $f \in \mathcal{M}^n(\mu)$ und $p > 0$ sei

$$\|f\|_p := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p},$$

wobei auch der Wert ∞ zugelassen ist. Wir definieren dann die Unterräume

$$\mathcal{L}^p(\mu) = \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n, \mu) := \{f \in \mathcal{M}^n(\mu) : \|f\|_p < \infty\}.$$

Insbesondere ist $\mathcal{L}^1(\mu)$ der bereits bekannte Raum aller μ-integrierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}^n$.[1] — Zunächst eine einfache Feststellung.

1 **Lemma** *Für jedes $p > 0$ ist $\mathcal{L}^p(\mu)$ ein reeller Vektorraum.* ⋊

⟪⟪ Mit[2] $f \in \mathcal{L}^p$ ist offensichtlich auch $cf \in \mathcal{L}^p$ für jedes $c \in \mathbb{R}$. Sind $f, g \in \mathcal{L}^p$, so ist $f + g$ messbar, und es gilt

$$|f+g|^p \leqslant (|f|+|g|)^p \leqslant (2\sup(|f|,|g|))^p \leqslant 2^p(|f|^p+|g|^p).$$

Nach Voraussetzung sind $|f|^p$ und $|g|^p$ integrierbar, also auch $|f|^p + |g|^p$. Also ist auch $|f+g|^p$ integrierbar $_{20.31}$ und damit $f + g \in \mathcal{L}^p$. ⟫⟫

▪ Die Ungleichungen von Young, Hölder und Minkowski

Zunächst benötigen wir drei fundamentale Ungleichungen.

Definition *Zwei reelle Zahlen $p, q > 0$ heißen konjugierte Exponenten oder kurz konjugiert, wenn*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \quad ⋊$$

Notwendigerweise ist dann $1 < p, q < \infty$. Außerdem gelten für konjugierte Exponenten die oft benötigten Identitäten

$$\begin{aligned} p+q=pq \quad &\Leftrightarrow \quad (p-1)(q-1)=1 \\ &\Leftrightarrow \quad p(q-1)=q \\ &\Leftrightarrow \quad q(p-1)=p. \end{aligned}$$

Die einzigen *selbstkonjugierten Exponenten* sind $p = 2$ und $q = 2$.

Bei der Betrachtung konvexer Funktionen hatten wir bereits folgende Ungleichung bewiesen $_{15.27}$.

2 **Youngsche Ungleichung** *Für nichtnegative reelle Zahlen a, b und konjugierte Exponenten p, q gilt*

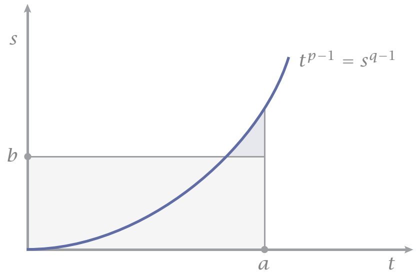
$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $a^p = b^q$. ⋊

[1] Diesen hatten wir bisher mit $\mathcal{L}^n(\mu)$ bezeichnet. Doch jetzt ist der Exponent p wichtiger.
[2] Das Maß μ ist im Folgenden immer fest. Daher notieren wir es nicht jedes Mal.

Abb 1

Zur Youngschen Ungleichung



⟪⟪ Hier noch ein geometrischer Beweis. — Es ist bekanntlich

$$\frac{a^p}{p} = \int_0^a t^{p-1}\,\mathrm{d}t, \qquad \frac{b^q}{q} = \int_0^b s^{q-1}\,\mathrm{d}s.$$

Wegen $(p-1)(q-1) = 1$ ist s^{q-1} die Umkehrfunktion von t^{p-1}, und die beiden letzten Integrale repräsentieren die schattierten Flächenstücke in Abbildung 1. Diese enthalten somit immer das Rechteck mit den Seiten a und b. Also gilt

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Gleichheit gilt genau für $b = a^{p-1}$, also $b^q = a^{q(p-1)} = a^p$. ⟫⟫

3 **Höldersche Ungleichung** *Ist $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ und $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$ mit konjugierten Exponenten p und q, so ist $fg \in \mathcal{L}^1(\mu)$, und es gilt*

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p\,\|g\|_q. \qquad \rtimes$$

Ausgeschrieben lautet diese Ungleichung

$$\int |fg|\,\mathrm{d}\mu \leqslant \left(\int |f|^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \left(\int |g|^q\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/q}.$$

Dies gilt übrigens auch, wenn eines der Integrale unbeschränkt ist.

⟪⟪ Wir können $\|f\|_p > 0$ und $\|g\|_q > 0$ annehmen. Denn andernfalls verschwindet mindestens eine der Funktionen fast überall 20.29, damit auch fg, und beide Seiten der Ungleichung sind Null.

Wegen $\|f\|_p < \infty$ und $\|g\|_q < \infty$ sind f und g fast überall endlich 20.29, so dass aufgrund der Youngschen Ungleichung 15.27

$$\frac{|f|}{\|f\|_p}\,\frac{|g|}{\|g\|_q} \leqslant_\mu \frac{1}{p}\,\frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q}\,\frac{|g|^q}{\|g\|_q^q}.$$

Nach Voraussetzung ist die rechte Seite integrierbar. Also ist auch $|fg|$ integrierbar 20.31 und damit $fg \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Integration ergibt

$$\frac{1}{\|f\|_p\,\|g\|_q}\int |fg|\,\mathrm{d}\mu \leqslant \frac{1}{p}\frac{1}{\|f\|_p^p}\int |f|^p\,\mathrm{d}\mu + \frac{1}{q}\frac{1}{\|g\|_q^q}\int |g|^q\,\mathrm{d}\mu = \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1.$$

Dies ist äquivalent zur behaupteten Ungleichung. ⟫⟫⟫

Im Fall der selbstadjungierten Exponenten wird die Höldersche Ungleichung zur Cauchy-Schwarzschen Ungleichung 5.32 in Integralform.

4 **Cauchy-Schwarzsche Ungleichung** *Für $f,g \in \mathcal{L}^2(\mu)$ ist $fg \in \mathcal{L}^1(\mu)$ mit*

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_2\,\|g\|_2\,. \qquad \rtimes$$

Mithilfe der Hölderschen Ungleichung erhalten wir die

5 **Minkowskische Ungleichung** *Für $f,g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ mit $p \geqslant 1$ gilt*

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p\,. \qquad \rtimes$$

⟪⟪⟪ Für $p = 1$ erhalten wir sofort [3]

$$\|f+g\|_1 = \int |f+g| \leqslant \int |f| + \int |g| = \|f\|_1 + \|g\|_1\,.$$

Sei also $p > 1$. Es ist

$$|f+g|^p = |f+g|^{p-1}\,|f+g| \leqslant |f|\,|f+g|^{p-1} + |g|\,|f+g|^{p-1}\,.$$

Mit dem zu p konjugierten Exponenten q ist $(p-1)q = p$ und somit

$$|f+g|^{(p-1)q} = |f+g|^p$$

integrierbar, da ja $f+g \in \mathcal{L}^p$ 1. Wir können deshalb die Höldersche Ungleichung auf beide Summanden anwenden und erhalten

$$\begin{aligned}\int |f+g|^p &\leqslant \left(\int |f|^p\right)^{1/p}\left(\int |f+g|^{(p-1)q}\right)^{1/q} \\ &\quad + \left(\int |g|^p\right)^{1/p}\left(\int |f+g|^{(p-1)q}\right)^{1/q} \\ &= \left\{\left(\int |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int |g|^p\right)^{1/p}\right\}\left(\int |f+g|^p\right)^{1/q}.\end{aligned}$$

Mit anderen Worten, es gilt

$$\|f+g\|_p^p \leqslant (\|f\|_p + \|g\|_p)\,\|f+g\|_p^{p/q}\,.$$

Ist nun $\|f+g\|_p = 0$, so ist nichts zu zeigen. Andernfalls dividieren wir durch $\|f+g\|_p^{p/q}$ und erhalten wegen $p - p/q = 1$ die Behauptung. ⟫⟫⟫

[3] Wir lassen jetzt des öfteren $\mathrm{d}\mu$ wie auch schon $\mathbb{R}^n$ fallen, um die Notation zu vereinfachen.

▪ Der Raum L^p für $1 \leqslant p < \infty$

Die Minkowskische Ungleichung ist die *Dreiecksungleichung* für $\|\cdot\|_p$. Trotzdem erhalten wir damit noch *keine Norm* auf $\mathcal{L}^p(\mu)$, denn es gilt nur 20.29

$$\|f\|_p = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \,\mathrm{d}\mu = 0 \quad\Leftrightarrow\quad |f|^p =_\mu 0 \quad\Leftrightarrow\quad f =_\mu 0.$$

Somit mangelt es $\|\cdot\|_p$ an der *Definitheit.*

Diesen Defekt behebt man in kanonischer Weise, indem man $\mathcal{L}^p$ durch den entsprechenden Nullraum

$$N(\mu) \coloneqq \{f \in \mathcal{M}^n(\mu) : f =_\mu 0\}$$

dividiert. Dies ist ein linearer Unterraum von $\mathcal{M}^n(\mu)$ mit folgenden Eigenschaften, deren einfachen Beweis wir übergehen.

6 **Lemma** *Für eine Funktion $f \in \mathcal{M}^n(\mu)$ sind äquivalent:*
(i) $f \in N(\mu)$.
(ii) $\|f\|_p = 0$ *für ein* $p > 0$.
(iii) $\|f\|_p = 0$ *für alle* $p > 0$.
(iv) $\{|f| > 0\}$ *ist eine μ-Nullmenge.* ⋊

Definition *Für $p > 0$ heißt*

$$L^p(\mu) \coloneqq L^p(\mathbb{R}^n, \mu) \coloneqq \mathcal{L}^p(\mu)/N(\mu)$$

der Lebesgueraum L^p auf $\mathbb{R}^n$ bezüglich μ. ⋊

Im Unterschied zu $\mathcal{L}^p$ sind die Elemente von L^p also keine *Funktionen*, sondern *Äquivalenzklassen* von Funktionen. Die einer Funktion $f \in \mathcal{L}^p$ zugeordnete Äquivalenzklasse ist die Nebenklasse

$$[f] = \{f + \phi : \phi \in N(\mu)\} = \{g \in \mathcal{L}^p(\mu) : g =_\mu f\}$$

aller Funktionen, die μ-fast überall mit f übereinstimmen. Daher macht es keinen Sinn, von dem *Wert* von $[f]$ an einem bestimmten Punkt zu sprechen, wenn dieser Punkt Maß Null hat. Auf Mengen vom Maß Null sind solche ›Funktionen‹ völlig unbestimmt – man kann sie dort beliebig umdefinieren, ohne an der Äquivalenzklasse etwas zu ändern. Dies läuft der naiven Vorstellung von einer Funktion 1.14 zugegebenermaßen zuwider und bedarf einer gewissen Gewöhnung.

Dagegen ist $\|\cdot\|_p$ wohldefiniert, denn aus $f =_\mu g$ folgt $|f|^p =_\mu |g|^p$ und damit $\|f\|_p = \|g\|_p$. Es gilt also

$$\|[f]\|_p = \|f\|_p.$$

Dasselbe gilt für die Vektorraumoperationen:

$$[\lambda f] = \lambda [f], \qquad [f] + [g] = [f + g],$$

denn das Ergebnis ist unabhängig von der Wahl der Repräsentanten. Somit ist $L^p(\mu)$ ebenfalls ein *reeller Vektorraum.*

7 **Satz** *Der Vektorraum $L^p(\mu)$ zusammen mit der Funktion $\|\cdot\|_p$ ist für $p \geqslant 1$ ein normierter Vektorraum.* ⋊

⟨⟨⟨⟨ Wir müssen die Normeigenschaften nachweisen. Die Definitheit gilt per Konstruktion:

$$\|[f]\|_p = 0 \;\Rightarrow\; \|f\|_p = 0 \;\Rightarrow\; f =_\mu 0 \;\Rightarrow\; [f] = [0].$$

Die positive Homogenität ist offensichtlich:

$$\|\lambda [f]\|_p = \left(\int |\lambda f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p} = |\lambda| \left(\int |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p} = |\lambda| \, \|[f]\|_p .$$

Die Dreiecksungleichung ergibt sich aus der Minkowskischen Ungleichung $_5$. ⟩⟩⟩⟩

Bemerkung Es ist natürlich lästig, immer von den Äquivalenzklassen $[f]$ zu sprechen. Wir werden deshalb auch weiterhin etwas unbekümmert von ›Funktionen‹ f sprechen und nur bei Gelegenheit darauf hinweisen, dass diese nur μ-fast überall wohldefiniert sind. ⊸

▪ Der Raum L^∞

Strebt ein konjugierter Exponent gegen 1, so strebt der andere gegen ∞. Deshalb werden 1 und ∞ auch als konjugierte Exponenten betrachtet. Die Frage stellt sich daher, ob es auch einen entsprechenden Raum $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ gibt.

Dieser Raum wird über das Supremum einer Funktion definiert. Die klassische Supremumsnorm ist jedoch nicht geeignet, da die Werte von messbaren Funktionen auf Mengen vom Maß Null nicht wohldefiniert sind. Statt dessen betrachten wir für $f \in \mathcal{M}^n(\mu)$ das *wesentliche Supremum*

$$\|f\|_\infty \coloneqq \operatorname{ess\,sup} |f| \coloneqq \inf \{\alpha \in \mathbb{R} : \; |f| \leqslant_\mu \alpha\}.$$

Ist die rechts stehende Menge leer, so ist vereinbarungsgemäß $\|f\|_\infty = \infty$, und f ist *im wesentlichen unbeschränkt*. Ist dagegen $\|f\|_\infty$ endlich, so ist

$$\{x : \; |f(x)| > \|f\|_\infty\} = \bigcup_{n \geqslant 1} \{x : \; |f(x| > \|f\|_\infty + 1/n\}$$

eine μ-Nullmenge, da jede der rechts stehenden Mengen aufgrund der Definition von $\|f\|_\infty$ eine μ-Nullmenge bildet. Es gilt somit

$$|f| \leqslant_\mu \|f\|_\infty .$$

Ist dieser Wert nicht endlich, so gibt es keine Nullmenge, außerhalb der $|f|$ beschränkt ist. Die letzte Ungleichung bleibt gültig, auch wenn sie trivial ist.

Es ist nicht schwer zu erkennen, dass

$$\mathcal{L}^\infty(\mu) := \{f \in \mathcal{M}^n(\mu) : \|f\|_\infty < \infty\}$$

wieder ein reeller Vektorraum ist. Auch gilt die entsprechende

8 **Höldersche Ungleichung für L^1 und L^∞** *Für $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und $g \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$ ist $fg \in \mathcal{L}^1(\mu)$, und es gilt*

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_1 \, \|g\|_\infty . \quad \rtimes$$

⟨⟨⟨⟨ Ist $|g| \leqslant_\mu \|g\|_\infty < \infty$, so ist $|fg| \leqslant_\mu |f| \, \|g\|_\infty$. Also ist fg integrierbar $_{20.31}$, und es gilt

$$\|fg\|_1 = \int |fg| \, \mathrm{d}\mu \leqslant \|g\|_\infty \int |f| \, \mathrm{d}\mu = \|g\|_\infty \, \|f\|_1 . \quad ⟩⟩⟩⟩$$

Dem wesentlichen Supremum auf $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ mangelt es ebenso an der Definitheit. Aber auch hier ist

$$\{f \in \mathcal{L}^\infty(\mu) : \|f\|_\infty = 0\} = \{f \in \mathcal{M}^n(\mu) : f =_\mu 0\} = N(\mu)$$

derselbe Nullraum wie bei der Betrachtung der $\mathcal{L}^p$-Räume $_6$.

Definition und Satz *Der Raum*

$$L^\infty(\mu) := L^\infty(\mathbb{R}^n, \mu) := \mathcal{L}^\infty(\mu)/N(\mu)$$

heißt der Lebesgueraum L^∞ auf $\mathbb{R}^n$ bezüglich μ. Mit der wesentlichen Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ wird dies ein normierter Vektorraum. $\rtimes$

⟨⟨⟨⟨ Wir betrachten nur die Dreiecksungleichung. Aus $|f| \leqslant_\mu \|f\|_\infty$ und $|g| \leqslant_\mu \|g\|_\infty$ folgt

$$|f + g| \leqslant |f| + |g| \leqslant_\mu \|f\|_\infty + \|g\|_\infty .$$

Dann ist aber auch $\|f + g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. ⟩⟩⟩⟩

▪ Beispiele

Endliche Masseverteilung Sei μ eine diskrete Masseverteilung auf $n \geqslant 1$ Punkten $p_1, .., p_n$ mit

$$\mu(\{p_i\}) = 1, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Jede Menge, die keinen dieser Punkte enthält, ist eine μ-Nullmenge. Es gilt somit

$$f =_\mu 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(p_i) = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Dementsprechend gilt

$$f =_\mu g \quad \Leftrightarrow \quad f(p_i) = g(p_i), \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Jede Äquivalenzklasse $[f]$ ist somit durch die n Werte $x_i = f(p_i)$ eindeutig bestimmt, und deren L^p-Norm ist

$$\|f\|_p = \Bigl(\sum_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|^p\Bigr)^{1/p}, \qquad 1 \leqslant p < \infty,$$

respektive

$$\|f\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|\,.$$

Somit können wir in diesem Fall $L^p(\mu)$ mit dem $\mathbb{R}^n$ identifizieren. Darüberhinaus ergibt sich, dass $\|\cdot\|_p$ *für alle* $p \geqslant 1$ eine *Norm* auf dem $\mathbb{R}^n$ definiert – dies hatten wir bisher nur für $p \in \{1, 2, \infty\}$ gezeigt. Diese Normen sind übrigens alle äquivalent $_{10.18}$. — Wir notieren noch die Höldersche Ungleichung für diesen Fall.

9 **Notiz** *Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ und konjugierte Exponenten $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ gilt*

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|_p\, \|y\|_q\,,$$

wobei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Standardskalarprodukt bezeichnet. $\rtimes$

Abzählbar Masseverteilung Sei μ eine diskrete Masseverteilung auf abzählbar unendlich vielen Punkten $p_1, p_2, ..$ mit Punktmassen 1 wie zuvor. Dann ist die Äquivalenzklasse von $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ eindeutig bestimmt durch die *Folge* der Funktionswerte $x = (x_k)_{k\geqslant1} = (f(p_k))_{k\geqslant1}$. Ihre L^p-Norm ist

$$\|x\|_p = \Bigl(\sum_{k\geqslant1} |x_k|^p\Bigr)^{1/p}, \qquad 1 \leqslant p < \infty,$$

respektive

$$\|x\|_\infty = \sup_{k\geqslant1} |x_k|\,.$$

Wir erhalten Räume von reellen Zahlenfolgen, die als *Lebesgueschen Folgenräume* ℓ^p bezeichnet werden:

$$\ell^p := \{x = (x_k)_{k\geqslant1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \|x\|_p < \infty\}, \qquad 1 \leqslant p \leqslant \infty.$$

Die Normen sind hier allerdings nicht mehr äquivalent. Vielmehr gilt $\ell^p \subsetneq \ell^q$ für $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$.

Entsprechend werden die Räume $\ell^p_{\mathbb{C}}$ komplexer Zahlenfolgen definiert.

24.8

Die Räume $L^p(E,\mu)$ Sei E eine μ-messbaren Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Die triviale Fortsetzung einer Funktion $f\colon E \to \mathbb{R}$ zu einer Funktion $f_E\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei

$$f_E \coloneqq f\chi_E \coloneqq \begin{cases} f & \text{auf } E, \\ 0 & \text{auf } E^c. \end{cases}$$

Damit definieren wir

$$L^p(E,\mu) \coloneqq \{f : E \to \mathbb{R} : f_E \in L^p(\mathbb{R}^n,\mu)\}.$$

Die diesbezüglichen Normen bezeichnen wir mit

$$\|f\|_{p,E} \coloneqq \|f_E\|_p = \left(\int_E |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}, \qquad 1 \leqslant p < \infty,$$

respektive

$$\|f\|_{\infty,E} \coloneqq \|f_E\|_\infty .$$

Diese Räume können wir mit Untervektorräume von $L^p(\mathbb{R}^n,\mu)$ identifizieren, oder auch mit einem Raum $L^p(\mathbb{R}^n,\mu_E)$, wenn man μ_E geeignet definiert.

■ Ein Stetigkeitssatz

Wir benötigen später folgende Stetigkeitseigenschaft in L^p. Dafür definieren wir die *h-Differenz* $\Delta_h\varphi$ einer Funktion φ als

$$(\Delta_h\varphi)(x) \coloneqq \varphi(x+h) - \varphi(x).$$

10 **Stetigkeit in L^p** *Für jede Funktion $f \in L^p(\mathbb{R}^n,\mu)$ mit $1 \leqslant p < \infty$ gilt*

$$\lim_{h\to 0} \|\Delta_h f\|_p = 0. \qquad \rtimes$$

⟪⟪⟪ Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine Funktion $\varphi \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\|f - \varphi\|_p < \varepsilon/3.$$

Aufgrund seines kompakten Trägers und somit gleichmäßigen Stetigkeit gibt es für dieses φ ein $\delta > 0$, so dass $\|\Delta_h\varphi\|_p < \varepsilon/3$ für $|h| < \delta$. Also gilt insgesamt

$$\|\Delta_h f\|_p \leqslant 2\,\|f - \varphi\|_p + \|\Delta_h\varphi\|_p < \varepsilon, \qquad |h| < \delta. \qquad ⟫⟫⟫$$

Bemerkungen *a.* Der Satz von der dominierten Konvergenz kann im Beweis nicht angewendet werden $_{\text{A-20}}$!

b. Der Satz gilt *nicht* in $L^\infty(\mathbb{R}^n,\mu)$, wie man anhand der charakteristischen Funktion eines nichtleeren Intervalls sieht. ⊸

24.2 Vollständigkeit

Die Lebesgueräume $L^p(\mu)$ werden mit $\|\cdot\|_p$ zu normierten Räumen. Somit ist auch der Begriff der Konvergenz erklärt. Eine Folge (f_k) konvergiert in L^p gegen eine Funktion $f \in L^p$ genau dann, wenn

$$\|f_k - f\|_p \to 0.$$

Jede solche Folge bildet auch eine Cauchyfolge bezüglich $\|\cdot\|_p$. Damit stellt sich die Frage, ob umgekehrt jede solche Cauchyfolge einen Grenzwert in L^p hat. Mit anderen Worten: *Sind die L^p-Räume vollständig*?

Zuerst ein auch für sich interessantes Zwischenergebnis.

11 **Lemma** *Ist (f_k) eine Cauchyfolge in L^p mit $1 \leqslant p < \infty$, so konvergiert eine Teilfolge punktweise fast überall gegen eine Funktion f in L^p.* ⋊

⟪⟪⟪ Ist (f_k) eine Cauchyfolge in L^p, so existiert zu jedem $n \geqslant 1$ ein N_n, so dass

$$\|f_k - f_l\|_p < \frac{1}{2^n}, \qquad k,l \geqslant N_n.$$

Wählen wir die N_n noch monoton steigend mit n, so bildet $(g_n) := (f_{N_n})$ eine Teilfolge von (f_k) mit

$$\|g_{n+1} - g_n\|_p < \frac{1}{2^n}, \qquad n \geqslant 1.$$

Die Funktionen

$$h_n = |g_1| + \sum_{1 \leqslant m < n} |g_{m+1} - g_m|, \qquad n \geqslant 1,$$

bilden eine monoton steigende Folge messbarer Funktionen mit 5

$$\|h_n\|_p \leqslant \|g_1\|_p + \sum_{1 \leqslant m < n} \|g_{m+1} - g_m\|_p \leqslant \|g_1\|_p + 1 < \infty,$$

die punktweise gegen eine Funktion h konvergieren. Aufgrund des Lemmas von Fatou 20.28 ist $h \in L^p$ und damit $h <_\mu \infty$. Wegen $h_n \to h <_\mu \infty$ konvergiert auch

$$g_n = g_1 + \sum_{1 \leqslant m < n} (g_{m+1} - g_m)$$

punktweise fast überall gegen eine Funktion f. Wegen $|f| \leqslant_\mu h \in L^p$ ist dabei auch $f \in L^p$. ⟫⟫⟫

12 **Satz von Riesz-Fischer** *Der Raum $L^p(\mu)$ mit $1 \leqslant p \leqslant \infty$ ist vollständig und somit ein Banachraum. Zu jeder Cauchyfolge (f_k) in $L^p(\mu)$ existiert also eine eindeutig bestimmte Funktion $f \in L^p(\mu)$ so, dass*

$$\|f_k - f\|_p \to 0, \qquad k \to \infty.$$

Außerdem konvergiert eine Teilfolge punktweise fast überall gegen f. ⋊

⟨⟨⟨⟨ Sei $1 \leqslant p < \infty$ und (f_k) eine Cauchyfolge in $L^p(\mu)$. Aufgrund des vorangehenden Lemmas 11 existiert eine Teilfolge (g_n), die punktweise fast überall gegen eine Funktion $f \in L^p$ konvergiert. Aufgrund des Lemmas von Fatou 20.28 gilt hierfür

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g_n - f|^p \, \mathrm{d}\mu \leqslant \liminf_{m\colon m \geqslant n} \int_{\mathbb{R}^n} |g_n - g_m|^p \, \mathrm{d}\mu.$$

Also gilt auch

$$\|g_n - f\|_p \leqslant \liminf_{m\colon m \geqslant n} \|g_n - g_m\|_p \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Mit der Cauchyfolgen-Eigenschaft gilt dann auch

$$\|f_k - f\|_p \leqslant \|f_k - g_n\|_p + \|g_n - f\|_p \to 0, \qquad k \to \infty$$

bei geeigneter Wahl von n in Abhängigkeit von k.

Betrachte jetzt eine Cauchyfolge (f_k) in $L^\infty(\mu)$. Dann existiert eine gemeinsame Nullmenge N, so dass

$$|f_k(x)| \leqslant \|f_k\|_\infty, \qquad |f_k(x) - f_l(x)| \leqslant \|f_k - f_l\|_\infty, \qquad x \notin N.$$

Somit konvergiert die Folge (f_k) auf N^c gleichmäßig gegen eine Funktion f, die wir durch Null zu einer ebenfalls messbaren Funktionen auf dem ganzen Raum fortsetzen. Wegen der punktweisen Ungleichung

$$|f_k - f| =_\mu \lim_{l \to \infty} |f_k - f_l| \leqslant_\mu \sup_{l\colon l \geqslant k} \|f_k - f_l\|_\infty$$

gilt dann auch

$$\|f_k - f\|_\infty \leqslant \sup_{l\colon l \geqslant k} \|f_k - f_l\|_\infty \to 0, \qquad k \to \infty.$$

Damit ist alles gezeigt. ⟩⟩⟩⟩

Eine Cauchyfolge in L^p konvergiert also immer gegen einen eindeutigen Grenzwert f *in* L^p. Außerdem konvergiert eine *Teilfolge* punktweise gegen f 11. Es ist jedoch möglich, dass die *Gesamtfolge* in keinem einzigen Punkt konvergiert, wie das nächste Beispiel zeigt.

▷ *Beispiel* Betrachte die Intervalle

$$\left(\frac{m-1}{n}, \frac{m}{n}\right), \qquad 1 \leqslant m \leqslant n, \quad n = 1, 2, .. \,,$$

die wir als (I_k) so durchnummerieren, dass ihre Länge gegen Null konvergiert. Für $f_k = \chi_{I_k}$ gilt dann

$$\|f_k\|_p = |I_k|^{1/p} \to 0$$

und somit $f_k \to 0$ in L^p. Jedoch konvergiert die Folge (f_k) in keinem Punkt von $[0,1]$, da sie in jedem Punkt die Werte 0 und 1 unendlich oft annimmt. ◁

Wir betrachten noch die umgekehrte Frage, wann punktweise Konvergenz die Konvergenz in L^p nach sich zieht. Dies ist nicht immer der Fall.

▷ *Beispiele* Es gilt

$$f_n = n^{1/p}\chi_{(0,1/n)} \to 0$$

punktweise auf $\mathbb{R}$, jedoch $\|f_n\|_p \equiv 1 \nrightarrow 0$. Gleichmäßige Konvergenz allein ist ebenfalls nicht hinreichend. So gilt

$$g_n = n^{-1/p}\chi_{(0,n)} \rightrightarrows 0,$$

aber wiederum $\|g_n\|_p \equiv 1 \nrightarrow 1$. ◁

13 **Satz** *Sei (f_k) eine Folge in $L^p(\mu)$ mit $1 \leqslant p < \infty$, die punktweise fast überall gegen eine Funktion f konvergiert. Existiert eine Funktion $g \in L^p(\mu)$ mit*

$$|f_k| \leqslant_\mu g, \qquad k \geqslant 1,$$

so ist f in L^p, und die Folge (f_k) konvergiert in $L^p(\mu)$ gegen f. ⋊

⟪⟪ Aus den Annahmen folgt $|f| \leqslant_\mu g$ und damit $f \in L^p$. Weiterhin gilt punktweise

$$|f_k - f|^p \leqslant (|f_k| + |f|)^p \leqslant_\mu 2^p g^p.$$

Da g^p integrabel ist, folgt mit dem Satz von der dominierten Konvergenz 20.30

$$\lim \int_{\mathbb{R}^n} |f_k - f|^p = \int_{\mathbb{R}^n} \lim |f_k - f|^p = 0.$$

Also gilt auch $\|f_k - f\|_p \to 0$. ⟫⟫

14 **Satz** *Sei (f_k) eine Folge in $L^p(E,\mu)$, die punktweise fast überall gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiert. Gilt $\mu(E) < \infty$, so ist $f \in L^p(E,\mu)$, und die Folge (f_k) konvergiert in $L^p(E,\mu)$ gegen f.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz ist

$$\sup \|f_k - f\|_{\infty,E} = M < \infty.$$

Da $\mu(E) < \infty$, ist außerdem $M^p \chi_E$ integrierbar. Mit dem Satz von der dominierten Konvergenz folgt daher

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_k - f|^p \, \chi_E \, \mathrm{d}\lambda \to 0.$$

Also gilt

$$\|f_k - f\|_{p,E} = \|f_{k,E} - f_E\|_p \to 0. \qquad ⟩⟩⟩⟩⟩$$

24.3 Faltungen

Die Faltungsoperation erzeugt durch Integration aus zwei Funktionen eine neue Funktion. — Im Folgenden beziehen wir uns nur auf das Lebesguemaß λ, welches wir auch mit $\mathrm{d}u$ und $\mathrm{d}v$ bezeichnen.

15 **Satz** *Seien $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ mit $1 \leqslant p < \infty$ und $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann existiert*

$$(f * g)(x) :=_\lambda \int_{\mathbb{R}^n} f(x-u)g(u) \, \mathrm{d}u \tag{1}$$

λ-fast überall und definiert eine Funktion $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\|f * g\|_p \leqslant \|f\|_p \, \|g\|_1 ,$$

genannt die Faltung von f und g. Außerdem ist $f * g = g * f$. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Wir bemerken zunächst, dass die Funktion h mit

$$h(x,u) = f(x-u)g(u)$$

messbar auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ist. Für die charakteristischen Funktionen von Intervallen ist dies sicher der Fall, denn dann ist h die charakteristische Funktion einer messbaren Menge. Also gilt dies auch für alle Treppenfunktionen 20.21 und mit dem Satz von Beppo Levi 20.26 für alle messbaren Funktionen.

Sei nun zuerst $p = 1$. Aufgrund des Satzes von Tonelli und der Translationsinvarianz des Lebesgueintegals gilt

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |f(x-u)g(u)| \, \mathrm{d}\lambda_{2n} \\
&\qquad = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-u)| \, \mathrm{d}x \right) |g(u)| \, \mathrm{d}u \\
&\qquad = \int_{\mathbb{R}^n} \|f\|_1 \, |g(u)| \, \mathrm{d}u = \|f\|_1 \, \|g\|_1 .
\end{aligned}$$

Also ist $h \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ 21.3. Das Integral in (1) existiert somit für λ-fast alle x und definiert eine Funktion $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 21.3. Für diese gilt aufgrund der ersten Rechnung

$$\begin{aligned}\|f * g\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-u)g(u)\,\mathrm{d}u \right| \mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-u)|\,\mathrm{d}x \right) |g(u)|\,\mathrm{d}u = \|f\|_1 \, \|g\|_1 \,.\end{aligned}$$

Für $1 < p < \infty$ wenden wir die Minkowskische Ungleichung in Integralform an und erhalten entsprechend

$$\begin{aligned}&\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-u)g(u)|\,\mathrm{d}u \right)^p \mathrm{d}x \right)^{1/p} \\ &\qquad \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-u)|^p\,\mathrm{d}x \right)^{1/p} |g(u)|\,\mathrm{d}u = \|f\|_p \, \|g\|_1 \,.\end{aligned}$$

Mit derselben Argumentation wie zuvor folgt hieraus $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\|f * g\|_p \leqslant \|f\|_p \, \|g\|_1 \,.$$

Die Identität $f * g = g * f$ folgt wieder aus der Translationsinvarianz des Lebesgueintegrals mit der Substitution $v \mapsto x - u$:

$$\begin{aligned}(f * g)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-u)g(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(x-u)f(u)\,\mathrm{d}u = (g * f)(x). \qquad \rangle\rangle\rangle\rangle\rangle\end{aligned}$$

Die Faltung mit einer L^∞-Funktion hat noch etwas bessere Eigenschaften.

16 **Satz** *Sei $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $f * g \in C_b(\mathbb{R}^n)$ mit*

$$\|f * g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \, \|g\|_1 \,.$$

Außerdem ist $f * g$ gleichmäßig stetig. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Für jedes x gilt

$$\int |f(x-u)g(u)|\,\mathrm{d}u \leqslant \int \|f\|_\infty \, |g(u)|\,\mathrm{d}u = \|f\|_\infty \, \|g\|_1 \,.$$

Also ist $f * g$ in jedem Punkt wohldefiniert und

$$\|f * g\|_\infty \leqslant \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \int |f(x-u)g(u)|\,\mathrm{d}u \leqslant \|f\|_\infty \, \|g\|_1 \,.$$

Sei nun $(\Delta_h \varphi)(u) = \varphi(u+h) - \varphi(u)$. Aufgrund der Translationsinvarianz des Lebesguemaßes ist

$$\begin{aligned}\Delta_h(f*g)(u) &= \int f(u+h-v)g(v)\,\mathrm{d}v - \int f(x-u)g(v)\,\mathrm{d}v \\ &= \int f(v)g(u+h-v)\,\mathrm{d}v - \int f(v)g(x-u)\,\mathrm{d}v \\ &= (f*\Delta_h g)(u),\end{aligned}$$

und mit der vorangehenden Abschätzung

$$\|\Delta_h(f*g)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \, \|\Delta_h g\|_1 \,.$$

Wegen $\|\Delta_h g\|_1 \to 0$ für $h \to 0$ aufgrund der Stetigkeit in L^1 10 ist $f*g$ gleichmäßig stetig. 》》》

Die Faltung zweier Funktionen hat die interessante Eigenschaft, so glatt wie der *bessere* der beiden Faktoren zu sein. Sei dazu

$$C_b^r(\mathbb{R}^n) \coloneqq \{f \in C^r(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{C^r} < \infty\}, \qquad 0 \leqslant r < \infty,$$

wobei

$$\|f\|_{C^r} \coloneqq \max_{|\alpha|\leqslant r} \|\partial^\alpha f\|_\infty \,.$$

17 **Satz** *Sei $f \in C_b^r(\mathbb{R}^n)$ und $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $f*g \in C_b^r(\mathbb{R}^n)$, und es gilt*

$$\partial^\alpha(f*g) = \partial^\alpha f * g, \qquad |\alpha| \leqslant r. \quad \rtimes$$

Außerdem sind alle Ableitungen bis zur Ordnung r gleichmäßig stetig.

《《《 Es genügt, eine erste partielle Ableitung ∂_i zu betrachten. Der Rest folgt induktiv. — Betrachte

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-u)g(u)\,\mathrm{d}u.$$

Für jedes x ist der Integrand integrierbar, die Ableitung $\partial_i f(x-u)g(u)$ existiert überall und besitzt für alle x die integrierbare Majorante $\|\partial_i f\|_\infty \, |g|$. Also 20.37 ist das Integral als Funktion von x_i differenzierbar, und für die Ableitung gilt

$$\partial_i(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_i f(x-u)g(u)\,\mathrm{d}u = (\partial_i f * g)(x).$$

Somit ist

$$\partial_i(f*g) = \partial_i f * g.$$

Da $\partial_i f$ nach Voraussetzung gleichmäßig beschränkt ist, ist diese Funktion auch gleichmäßig stetig 16 . 》》》

Fixieren wir eine Funktion $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, so ist $f * \varphi$ also für jedes $f \in L^1$ beliebig oft differenzierbar. Wir erhalten damit einen linearen Operator

$$T_\varphi : L^1(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n), \quad f \mapsto T_\varphi f = f * \varphi,$$

mit der Eigenschaft, dass

$$D^\alpha T_\varphi f = T_{D^\alpha \varphi} f, \qquad \alpha \in \mathbb{N}_0^n.$$

Außerdem gilt hierfür

$$\|T_\varphi f\|_{C^r} \leqslant \|\varphi\|_{C^r} \|f\|_1 < \infty, \qquad 1 \leqslant r < \infty,$$

wie man leicht zeigt.

24.4 Approximative Einheiten

Mithilfe von Faltungen lässt sich die Aufgabe elegant lösen, ›weniger glatte‹ Funktionen durch ›glattere‹ Funktionen zu approximieren, wobei die konkrete Bedeutung dieser Begriffe vom Kontext abhängt. Benötigt werden dazu Funktionen, die die Faltungsoperation auf immer kleinere Umgebungen eines Punktes konzentrieren.

18 **Definition** *Eine Folge (φ_k) in $L^1(\mathbb{R}^n)$ heißt Diracfolge, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.*

(D-1) $\varphi_k \geqslant 0$ *für alle* k,

(D-2) $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k \,\mathrm{d}\lambda = 1$ *für alle* k, *und*

(D-3) $\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta} \varphi_k \,\mathrm{d}\lambda \to 0$ *für* $k \to \infty$ *für jedes* $\delta > 0$. ⋊

Die ersten beiden Bedingungen bewirken, dass die Faltung mit jedem φ_k eine Mittelwertbildung darstellt. Die dritte Bedingung impliziert, dass diese Mittelwerte gegen eine Punktauswertung im Nullpunkt konvergieren.

Diracfolgen sind leicht zu beschaffen, wobei man den diskreten Parameter k auch noch zu einem kontinuierlichen Parameter κ verallgemeinern kann.

19 **Lemma** *Ist φ eine nichtnegative Funktion in $L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\|\varphi\|_1 = 1$, so definiert*

$$\varphi_\kappa \coloneqq \kappa^n \varphi \circ \kappa, \qquad \kappa \geqslant 1,$$

eine Diracfamilie oder approximative Einheit in $L^1(\mathbb{R}^n)$: für jede Wahl einer reellen Folge (κ_n) mit $1 \leqslant \kappa_n \nearrow \infty$ bildet (φ_{κ_n}) eine Diracfolge. ⋊

⟨⟨⟨⟨ Offensichtlich sind alle φ_κ nichtnegativ, und mit $u \mapsto \kappa^{-1}u$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\kappa \,\mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}^n} \kappa^n \varphi(\kappa u) \,\mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(u) \,\mathrm{d}u = 1.$$

Für jedes $\delta > 0$ erhält man auf die gleiche Weise

$$\int_{|x| \geqslant \delta} \varphi_\kappa \,\mathrm{d}u = \int_{|x| \geqslant \kappa\delta} \varphi(u) \,\mathrm{d}u \to 0, \qquad \kappa \to \infty,$$

aufgrund des Satzes von der dominierten Konvergenz $_{20.30}$. ⟩⟩⟩⟩

20 ▷ A. Die charakteristische Funktion jedes Intervalls mit Volumen 1 definert eine Diracfamilie.

B. Ist φ glatt mit Träger in $\{|x| \leqslant 1\}$, so spricht man auch von einem *glättenden Kern*. Ein typisches Beispiel ist

$$\sigma(x) = \begin{cases} c \exp\left(\dfrac{1}{|x|^2 - 1}\right), & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geqslant 1, \end{cases}$$

mit $c > 0$ so, dass $\|\sigma\|_1 = 1$. Die Diracfamlie $\sigma_\kappa = \kappa^n \sigma \circ \kappa$ besteht dann aus glatten Funktionen mit $\operatorname{supp} \sigma_\kappa = \bar{B}_{1/\kappa}$.

C. Die *Gaussfunktion*

$$\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \mathrm{e}^{-|x|^2/2}$$

liefert eine glatte approximative Einheit mit nicht-kompakten Trägern. Sie spielt eine wichtige Rolle bei der Fouriertransformation. ◁

Der nächste Satz beschreibt zwei Situationen, wo mithilfe einer Diracfolge geglättete Funktionen gegen die ungeglättete Funktion konvergieren.

21 **Satz** *Sei (φ_k) eine Diracfolge in $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Für jedes $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ mit $1 \leqslant p < \infty$ gilt dann*

$$\lim_{k\to\infty} \|f * \varphi_k - f\|_p = 0.$$

Ist K eine kompakte Menge von Stetigkeitspunkten von f, so gilt außerdem

$$\lim_{k\to\infty} \|f * \varphi_k - f\|_{\infty,K} = 0. \qquad ⋊$$

⟨⟨⟨⟨ Die gefalteten Funktionen $f_k := f * \varphi_k$ sind wohldefiniert $_{15}$, und mit

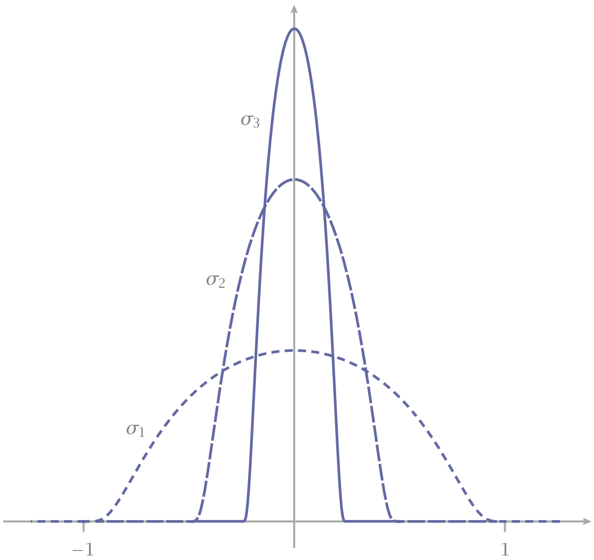
$$f(x) = f(x) \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(u) \,\mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi_k(u) \,\mathrm{d}u$$

aufgrund von (D-2) und $(\Delta_u f)(x) = f(x-u) - f(x)$ ist

$$f_k(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_u f(x) \varphi_k(u) \,\mathrm{d}u. \tag{2}$$

Abb 2

Diracfamilie zum glättende Kern σ



Betrachte hiervon die L^p-Norm für $1 \leqslant p < \infty$. Mit der Minkowskischen Ungleichung in Integralform

$$\begin{aligned}\|f_k - f\|_p &\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left\{\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta_u f(x)|\, \varphi_k(u)\,\mathrm{d}u\right\}^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \left\{\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta_u f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right\}^{1/p} \varphi_k(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \|\Delta_u f\|_p\, \varphi_k(u)\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Aufgrund der L^p-Stetigkeit von f 10 existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass

$$\|\Delta_u f\|_p < \varepsilon, \qquad |u| < \delta. \tag{3}$$

Für den Anteil I_δ des letzten Integrals über $B_\delta = \{|u| < \delta\}$ gilt dann

$$I_\delta = \int_{B_\delta} \|\Delta_u f\|_p\, \varphi_k(u)\,\mathrm{d}u < \varepsilon \int_{B_\delta} \varphi_k(u)\,\mathrm{d}u < \varepsilon.$$

Für das restliche Integral J_δ gilt

$$J_\delta = \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta} \|\Delta_u f\|_p\, \varphi_k(u)\,\mathrm{d}u \leqslant 2\,\|f\|_p \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta} \varphi_k(u)\,\mathrm{d}u.$$

Wegen (D-3) wird das letzte Integral kleiner als ε für $k > K$ hinreichend groß. Somit wird insgesamt

$$\|f_k - f\|_p \leqslant I_\delta + J_\delta < (1 + 2\,\|f\|_p)\varepsilon, \qquad k > K.$$

24.18

Da dies für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, ist die erste Behauptung bewiesen.

Sei nun K eine kompakte Menge von Stetigkeitspunkten von f. Ausgehend von (2) ist

$$\|f_k - f\|_K \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \|\Delta_u f\|_K \, \varphi_k(u) \, \mathrm{d}u.$$

Da f auf K sogar gleichmäßig stetig ist $_{10.19}$, existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass

$$\|\Delta_u f\|_K < \varepsilon, \qquad |u| < \delta.$$

Nun kann man wieder bei (3) fortfahren und erhält die Behauptung. ⟫⟫⟫

▪ Eine Anwendung

22 **Satz** *Zu jeder kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ und jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine glatte Abschneidefunktion $\varphi_\varepsilon \colon \mathbb{R}^n \to [0,1]$ derart, dass*

$$\varphi \,|\, K \equiv 1$$

und $\operatorname{supp} \varphi \subset K_\varepsilon \coloneqq \{x : \operatorname{dist}(x, K) < \varepsilon\}$. ⋊

⟪⟪⟪ Wähle irgendeine glatte Funktion $\sigma \colon \mathbb{R}^n \to [0,1]$ mit $\|\sigma\|_1 = 1$ und $\operatorname{supp} \sigma \subset B_1$ und setze

$$\sigma_\varepsilon = \varepsilon^{-n} \sigma \circ \varepsilon^{-1}, \qquad \varepsilon > 0.$$

Dann ist $\operatorname{supp} \sigma_\varepsilon \subset B_\varepsilon$. Die Funktion

$$\varphi_\varepsilon \coloneqq \chi_{K_\varepsilon} * \sigma_\varepsilon,$$

ist glatt $_{??}$ mit Werten in $[0,1]$. Für $x \in K$ gilt $\operatorname{supp} \sigma_\varepsilon(x - \cdot) \subset \operatorname{supp} K_\varepsilon$ und deshalb

$$\varphi_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \sigma_\varepsilon(x-u) \chi_{K_\varepsilon}(u) \, \mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}^n} \sigma_\varepsilon(x-u) \, \mathrm{d}u = 1.$$

Für $x \notin K_{2\varepsilon}$ ist $\operatorname{supp} \sigma_\varepsilon(x - \cdot) \cap \operatorname{supp} K_\varepsilon = \varnothing$ und deshalb $\varphi_\varepsilon(x) = 0$. Ersetzen wir 2ε durch ε, so erhalten wir Behauptung. ⟫⟫⟫