Universität Stuttgart

Dr. Björn de Rijk
Jonas Brinker M.Sc.
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Funktionalanalysis (WS 2018/19)

Gruppenübungsblatt 2

Aufgabe 2.1.

(a) Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Zeigen Sie

$$\overline{B_x(r)} = \{y \in X \mid \|x-y\| \leq r\}, \quad x \in X, r > 0,$$

(vergleich mit Aufgabe 1.2).

(b) Seien $(X_j, \|\cdot\|_j)$, $j = 1, \dots, n$ normierte Räume. Für $x = (x_1, \dots, x_n) \in \prod_{j=1}^n X_j$ definieren wir

$$\|x\|_{(p)} := \left(\sum_{j=1}^n \|x_j\|_j^p\right)^{\frac{1}{p}}, \text{ bzw. } \|x\|_{(\infty)} := \max_{1\leq j\leq n} \|x_j\|_j.$$

Beweisen Sie, dass dies zueinander äquivalente Normen sind.

Aufgabe 2.2.

Sei $1 \leq p < q < \infty$ und sei ℓ^p der Raum der p-summierbaren complexen Folgen, ausgestattet mit der p-Norm $\|\cdot\|_p$. Sei ferner c_0 der Raum der complexen Nullfolgen, ausgestattet mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$. Wir schreiben c_* für den Raum der complexen Folgen mit nur endlichen vielen von Null verschiedenen Folgengliedern. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) c_* ist ein dichter Teilraum in $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ und $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$.

(b) ℓ^p ist ein dichter Teilraum in $(\ell^q, \|\cdot\|_q)$ und $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$.

(c) $\bigcup\limits_{p\in[1,q)} \ell^p \subsetneqq \ell^q$ und $\bigcup\limits_{p\in[1,\infty)} \ell^p \subsetneqq c_0$ sind jeweils echte Teilmengen.

Aufgabe 2.3.

Wir definieren die 2-Norm auf $C^0([0,1], \mathbb{R})$ durch den Ausdruck

$$\|f\|_2 := \left(\int_0^1 |f(t)|^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}, \text{ für } f \in C^0([0,1], \mathbb{R}).$$

(a) Zeigen Sie, dass $(C^0([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$ nicht vollständig ist.

(b) Folgern Sie, dass $\|\cdot\|_2$ nicht zu der Standardnorm $\|\cdot\|_\infty$ auf $C^0([0,1], \mathbb{R})$ äquivalent ist.

Aufgabe 2.4.

Es seien $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, $V \subseteq X$ ein Unterraum. Sei $\widehat{x} = x + V$ die Äquivalenzklasse von $x \in X$ in X/V. Setze

$$p(\widehat{x}) := \inf_{y \in V} \|x - y\| \,.$$

(a) Zeigen Sie, dass p genau dann eine Norm auf X/V ist, wenn V abgeschlossen ist.

Im Folgenden betrachten wir für abgeschlossenes V den normierten Raum $(X/V, p)$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(b) Zu jeder konvergenten Folge $\{q_n\}$ in X/V existiert eine konvergente Folge $\{x_n\}$ in X mit $\widehat{x}_n = q_n$.

(c) Eine Menge $U \subseteq X/V$ ist genau dann offen in X/V, wenn $\{x \in X \mid \widehat{x} \in U\}$ in X offen ist.

Aufgabe 2.5. (Bonus)

In dieser Aufgabe statten wir den Raum der glatten Funktionen $C^\infty[0,1]$ [1] mit einem Konvergenzbergriff aus, der mit der Vektorraumstruktur verträglich ist und den Raum vollständig macht.

Sei $p_j(f) := \sup_{x \in [0,1]} |f^{(j)}(x)|$ für $f \in C^\infty[0,1]$, $j \in \mathbb{N}_0$. Wir definieren

$$d(f,g) := \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \frac{p_j(f-g)}{1 + p_j(f-g)}, \text{ für } f, g \in C^\infty[0,1].$$

(a) Zeigen Sie, dass der normierte Raum $(C^\infty[0,1], p_0)$ nicht vollständig ist.

(b) Es gilt $d(f_n, 0) \to 0,\ n \to \infty$, genau dann wenn $p_j(f_n) \to 0,\ n \to \infty$, für alle $j \in \mathbb{N}_0$. Beweisen Sie dies.

(c) Beweisen Sie, dass d eine Metrik, aber keine Norm, auf $C^\infty[0,1]$ ist.

(d) Zeigen Sie, dass $(C^\infty[0,1], d)$ vollständig ist.

Alle Aufgaben auf diesem Blatt werden am
Mittwoch, den 24.10.2018
in den Gruppenübungen besprochen.

[1] Mit $C^\infty[0,1]$ wird der Raum der beliebig of stetig differenzierbaren Funktionen $f\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ bezeichnet. Eine Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ nennen wir stetig differenzierbar, wenn sie stetig ist, auf $(0,1)$ stetig differenzierbar ist und außerdem die Ableitung auf $[0,1]$ stetig fortgesetzt werden kann. Die Fortsetzung der Ableitung wird auch mit f' bezeichnet.