

Funktionalanalysis (WS 2018/19)
Gruppenübungsblatt 3

Aufgabe 3.1.

In dieser Aufgabe werden wir einige Vollständigkeitsaussagen beweisen, die in der Vorlesung weggelassen wurden.

- (a) Sei X ein Banachraum und $V \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum. Zeigen Sie, dass dann auch X/V mit der üblichen Norm (siehe Aufgabe 2.4) ein Banachraum ist.
- (b) Für jedes $p \in [1, \infty]$ ist der Raum ℓ^p (bzgl. der p -Norm) vollständig. Beweisen Sie dies ohne Verwendung von Sätzen aus der Höheren Analysis.
Hinweis: Aufgabe 1.1 kann auf den Fall $p = \infty$ angewendet werden.

Aufgabe 3.2.

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $\{a_k\} \subset X$ eine Folge.

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt *unbedingt konvergent*, falls für jede Bijektion $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ auch die umgeordnete Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ konvergiert. In unendlich dimensionalen Räumen ist dies *nicht* äquivalent zur *absoluten Konvergenz*.

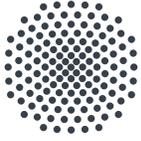
- (a) Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. Zeigen Sie, dass jede in X absolut konvergente Reihe auch unbedingt konvergiert.
- (b) Entscheiden Sie ob die Reihen divergieren, konvergieren oder sogar unbedingt bzw. absolut konvergieren. Jeder der Räume trägt die üblichen, in der Vorlesung definierten Normen.
 - (i) $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ in $C^0([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], \mathbb{R})$ bzw. in $C^0([0, 1], \mathbb{R})$, wobei $f_n(x) := x^n$.
 - (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} h_n$ in $L^1(1, 2)$, wobei $h_n(x) := \frac{1}{n^x}$.
 - (iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e_n$ in ℓ^∞ wobei $e_n = \{\delta_{n,j}\}_{j=1}^{\infty}$ mit dem Kronecker-Delta $\delta_{n,j}$.

Aufgabe 3.3.

Wir betrachten ℓ^∞ mit den Normen

$$\|x\|_\infty := \sup_{k \in \mathbb{N}} |x(k)| \quad \text{und} \quad \|x\| = \sup_{k \in \mathbb{N}} 2^{-k} |x(k)|.$$

- (a) Zeigen Sie, dass $B = \{x \in \ell^\infty \mid \|x\|_\infty \leq 1\}$ in $(\ell^\infty, \|\cdot\|)$ kompakt ist.
- (b) Ist es möglich, dass zwei Normen $\|\cdot\|_A$ und $\|\cdot\|_B$ auf ℓ^∞ äquivalent sind, aber gleichzeitig $\{x \in \ell^\infty \mid \|x\|_A \leq 1\}$ kompakt in $(\ell^\infty, \|\cdot\|_B)$ ist?



Aufgabe 3.4.

Seien X, Y Abschlüsse offener und beschränkter Mengen im \mathbb{R}^n . Sei $k \in C^0(X \times Y, \mathbb{R})$. Wir statten $C^0(Y, \mathbb{R})$ und $C^0(X, \mathbb{R})$ mit den üblichen Normen aus und definieren den Operator $T: C^0(Y, \mathbb{R}) \rightarrow C^0(X, \mathbb{R})$ durch

$$Tf(x) := \int_Y k(x, y)f(y) \, dy, \quad f \in C^0(Y, \mathbb{R}).$$

Zeigen Sie, dass die Menge $\{Tf \mid f \in B_0(1)\}$ relativ kompakt in $C^0(X, \mathbb{R})$ ist.