Dr. Björn de Rijk
Jonas Brinker M.Sc.
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Universität Stuttgart

Funktionalanalysis (WS 2018/19)

Gruppenübungsblatt 3

Aufgabe 3.1.

In dieser Aufgabe werden wir einige Vollständigkeitsaussagen beweisen, die in der Vorlesung weggelassen wurden.

(a) Sei X ein Banachraum und $V \subset X$ ein abgeschlossene Unterraum. Zeigen Sie, dass dann auch X/V mit der üblichen Norm (siehe Aufgabe 2.4) ein Banachraum ist.

(b) Für jedes für jedes $p \in [1, \infty]$ ist der Raum ℓ^p (bzgl. der p-Norm) vollständig. Beweisen Sie dies ohne Verwendung von Sätzen aus der Höheren Analysis.
Hinweis: Aufgabe 1.1 kann auf den Fall $p = \infty$ angewendet werden.

Aufgabe 3.2.

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $\{a_k\} \subset X$ eine Folge.

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt *unbedingt konvergent*, falls für jede Bijektion $\sigma \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ auch die umgeordnete Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ konvergiert. In unendlich dimensionalen Räumen ist dies *nicht* äquivalent zur *absoluten Konvergenz.*

(a) Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. Zeigen Sie, dass jede in X absolut konvergente Reihe auch unbedingt konvergiert.

(b) Entscheiden Sie ob die Reihen divergieren, konvergieren oder sogar unbedingt bzw. absolut konvergieren. Jeder der Räume trägt die üblichen, in der Vorlesung definierten Normen.

(i) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ in $C^0([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], \mathbb{R})$ bzw. in $C^0([0,1], \mathbb{R})$, wobei $f_n(x) := x^n$.

(ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} h_n$ in $L^1(1,2)$, wobei $h_n(x) := \frac{1}{n^x}$.

(iii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e_n$ in ℓ^∞ wobei $e_n = \{\delta_{n,j}\}_{j=1}^{\infty}$ mit dem Kronecker-Delta $\delta_{n,j}$.

Aufgabe 3.3.

Wir betrachten ℓ^∞ mit den Normen

$$\|x\|_\infty := \sup_{k \in \mathbb{N}} |x(k)| \qquad \text{und} \qquad |||x||| = \sup_{k \in \mathbb{N}} 2^{-k} |x(k)| \,.$$

(a) Zeigen Sie, dass $B = \{x \in \ell^\infty \mid \|x\|_\infty \leq 1\}$ in $(\ell^\infty, |||\cdot|||)$ kompakt ist.

(b) Ist es möglich, dass zwei Normen $\|\cdot\|_A$ und $\|\cdot\|_B$ auf ℓ^∞ äquivalent sind, aber gleichzeitig $\{x \in \ell^\infty \mid \|x\|_A \leq 1\}$ kompakt in $(\ell^\infty, \|\cdot\|_B)$ ist?

Universität Stuttgart

Dr. Björn de Rijk
Jonas Brinker M.Sc.
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Aufgabe 3.4.

Seien X, Y Abschlüsse offener und beschränkter Mengen im $\mathbb{R}^n$. Sei $k \in C^0(X \times Y, \mathbb{R})$. Wir statten $C^0(Y, \mathbb{R})$ und $C^0(X, \mathbb{R})$ mit den üblichen Normen aus und definieren den Operator $T\colon C^0(Y, \mathbb{R}) \to C^0(X, \mathbb{R})$ durch

$$Tf(x) := \int_Y k(x,y) f(y) \,\mathrm{d}y, \quad f \in C^0(Y, \mathbb{R}).$$

Zeigen Sie, dass die Menge $\{Tf \mid f \in B_0(1)\}$ relativ kompakt in $C^0(X, \mathbb{R})$ ist.

Dieses Gruppenübungsblatt wird am
Mittwoch, den 31.10.2018
besprochen.