Universität Stuttgart

Dr. Björn de Rijk
Jonas Brinker M.Sc.
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Funktionalanalysis (WS 2018/19)

Gruppenübungsblatt 4

Aufgabe 4.1.

Sei H ein Hilbertraum mit Innenprodukt $(\cdot,\cdot)$ und $a, b \in H$ Elemente mit $(a, b) > 0$. Zeigen Sie, dass unter den Elemente $x \in H$ mit $(a, x) \geq 1$ und $(b, x) \geq 1$ ein eindeutiges Element mit minimaler Norm existiert.

Aufgabe 4.2.

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein reeller normierter Raum, so dass $\|\cdot\|$ die Parallelogrammidentität

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \text{ für alle } x, y \in X,$$

erfüllt. Zeigen Sie, dass die Norm $\|\cdot\|$ durch ein Innenprodukt $(\cdot,\cdot)$ auf X induziert wird, d.h. es gilt $\|x\|^2 = (x, x)$ für alle $x \in X$.

Hinweis: Finden Sie einen Kandidaten für $(\cdot,\cdot)$ und zeigen Sie $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$ nacheinander für α aus $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und schließlich $\mathbb{R}$.

Anmerkung: Dieselbe Aussage gilt auch in normierten Räumen über $\mathbb{C}$, nur ist hier der Beweis etwas mühseliger. Das Innenprodukt kann dann durch eine der Formeln in Aufgabe 4.4 definiert werden.

Aufgabe 4.3.

(a) Sei H ein Innenproduktraum und $A \subset H$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.
- **(i)** $A^\perp$ ist ein abgeschlossener Teilraum von H.
- **(ii)** Ist $0 \in A$, dann $A \cap A^\perp = \{0\}$, sonst $A \cap A^\perp = \emptyset$.
- **(iii)** Ist $B \subset A$, dann $A^\perp \subset B^\perp$.
- **(iv)** Ist H vollständig, dann $A^{\perp\perp} = \overline{\operatorname{Sp} A}$, d.h. $A^{\perp\perp}$ ist der Abschluss der linearen Hülle von A.

(b) Wir definieren den Teilraum der geraden und ungeraden Funktionen[1] im Hilbertraum $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{F})$

$$L^2_{\text{even}}(\mathbb{R}, \mathbb{F}) := \{\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{F}) \mid f(x) = f(-x) \text{ für fast alle } x \in \mathbb{R}\},$$
$$L^2_{\text{odd}}(\mathbb{R}, \mathbb{F}) := \{\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{F}) \mid f(x) = -f(-x) \text{ für fast alle } x \in \mathbb{R}\}.$$

Zeigen Sie, dass $L^2_{\text{even}}(\mathbb{R}, \mathbb{F})^\perp = L^2_{\text{odd}}(\mathbb{R}, \mathbb{F})$ und folgern Sie

$$L^2(\mathbb{R}, \mathbb{F}) = L^2_{\text{even}}(\mathbb{R}, \mathbb{F}) \oplus L^2_{\text{odd}}(\mathbb{R}, \mathbb{F}).$$

Aufgabe 4.4.

Wir betrachten einen komplexen Hilbertraum H mit Innenprodukt $(\cdot,\cdot)$ und zugehöriger Norm $\|\cdot\|$. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha \neq \pm 1$ eine n-te Einheitswurzel. Beweisen Sie die Identitäten

$$(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \|x + \alpha^k y\|^2 \alpha^k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|x + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} y\|^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} \, \mathrm{d}\phi,$$

für beliebige $x, y \in H$.

[1] Wie üblich sprechen wir von Funktionen, meinen aber eigentlich deren Äquivalenzklassen im L^p-Raum. Die Äquivalenzklasse einer messbaren Funktion f wird wie in der Vorlesung mit $\widehat{f}$ bezeichnet.

Dr. Björn de Rijk
Jonas Brinker M.Sc.
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Aufgabe 4.5. (Bonus)

Wir betrachten den Banachraum c der konvergenten Folgen in $\mathbb{C}$, ausgestattet mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$.

(a) Zeigen Sie, dass die Bestapproximation der konstanten Folge $x_* = \{1\}_{n\in\mathbb{N}}$ an den abgeschlossenen Teilraum c_0 der Nullfolgen nicht eindeutig ist. D.h. zeigen Sie, dass ein Element $x \in c_0$ mit der Eigenschaft $\|x_* - x\|_\infty = \inf\{\|x_* - y\|_\infty \mid y \in c_0\}$ zwar existiert, aber nicht eindeutig ist.

Nun wechseln wir zu dem Banachraum $V := \{f \in C^0([0,1],\mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$, ausgestattet mit der Supremumsnorm. Wir betrachten die Funktion $g(t) = t$ und den abgeschlossenen Teilraum $W := \{f \in V \mid \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 0\}$.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{dist}(g, W) := \inf\{\|g - f\|_\infty \mid f \in W\} = \frac{1}{2}$.

(c) Folgern Sie, dass zu g keine Bestapproximation an W existiert. D.h. es gibt kein $h \in W$ mit $\|g - h\|_\infty = \mathrm{dist}(g, W)$.

Anmerkung: Diese Übungsaufgabe zeigt, dass anders als bei Hilberträumen die Existenz oder Eindeutigkeit von Bestapproximationen in Banachräumen nicht gesichert ist.

Dieses Gruppenübungsblatt wird am
Mittwoch, den 7.11.2018
besprochen.