Universität Stuttgart

Dr. Björn de Rijk
Jonas Brinker M.Sc.
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Funktionalanalysis (WS 2018/19)

Gruppenübungsblatt 5

Aufgabe 5.1.

(a) Sei H ein Hilbertraum mit Innenprodukt $(\cdot,\cdot)$ und Y ein endlichdimensionaler Unterraum mit Orthonormalbasis $\{e_1,\dots,e_n\}$. Zeigen Sie, dass zu jedem $x \in H$ die zugehörige Bestapproximation in Y gegeben ist durch

$$y = \sum_{k=1}^{n} (x, e_k) e_k.$$

(b) Berechnen Sie die Bestapproximation von $x \mapsto x$ in dem von $x \mapsto \sin(x)$ und $x \mapsto \sin(2x)$ aufgespannten Unterraum von $L^2([-\pi,\pi],\mathbb{R})$

(c) Sei $\{e_k\}$ eine Orthonormalfolge im Hilbertraum H und $A = \overline{\mathrm{Sp}\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}}$. Zeigen Sie, dass zu jedem $x \in H$ die zugehörige Bestapproximation in A gegeben ist durch

$$a = \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k.$$

Aufgabe 5.2.

Nutzen Sie die Theorie der Fourierreihen (bzw. der Orthonormalbasen) und zeigen Sie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Hinweis: Nutzen Sie, dass $x \mapsto \frac{\exp(inx)}{(2\pi)^{1/2}}$, $n \in \mathbb{Z}$, eine ONB von $L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ bildet.

Aufgabe 5.3.

Sei $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe und $H(\mathbb{D})$ der Vektorraum der holomorphen Funktionen auf $\mathbb{D}$. Sei für $0 < r < 1$

$$\|F\|_{(r)} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi})|^2 \,\mathrm{d}\phi \right)^{\frac{1}{2}}, \ F \in H(\mathbb{D}).$$

(a) Beweisen Sie, dass $(H(\mathbb{D}), \|\cdot\|_{(r)})$ ein unvollständiger Innenproduktraum ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Monome $z \mapsto \frac{z^k}{r^k}$, $k \in \mathbb{N}_0$, eine Orthonormalbasis in dem Innenproduktraum $(H(\mathbb{D}), \|\cdot\|_{(r)})$ bilden.

Wir definieren weiter $\|F\| := \sup_{0<r<1} \|F\|_{(r)}$ für $F \in H(\mathbb{D})$, setzen

$$H^2(\mathbb{D}) := \{F \in H(\mathbb{D}) \mid \|F\| < \infty\}$$

und statten $H^2(\mathbb{D})$[1] mit $\|\cdot\|$ als Norm aus. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(c) $H^2(\mathbb{D})$ ist ein Innenproduktraum und die Monome $z \mapsto z^k$, $k \in \mathbb{N}_0$, bilden eine Orthonormalbasis in $H^2(\mathbb{D})$.
Hinweis: Zeigen Sie $\|F\| = \lim_{r \nearrow 1} \|F\|_{(r)}$ mit Hilfe der Potenzreihendarstellung.

(d) $H^2(\mathbb{D})$ ist ein Hilbertraum.

[1] $H^2(\mathbb{D})$ ist ein sogenannter Hardy-Raum.

Dr. Björn de Rijk
Jonas Brinker M.Sc.
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Aufgabe 5.4.

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

1. $\dim(X) < \infty$;
2. Jede abgeschlossene und nichtleere Teilmenge $A \subset X$ hat die Bestapproximationseigenschaft, d.h. für alle $p \in X$ existiert ein $q \in A$ mit $\|p-q\| = \inf\{\|p-x\| \mid x \in A\}$.

Hinweis: Die Einheitskugel ist in einem unendlich dimensionalen normierten Raum nicht kompakt. Erinnern Sie sich an den Beweis zu dieser Aussage.

Aufgabe 5.5. (Bonus)

Sei M eine beliebige Menge. Wir bezeichnen mit $\ell^2(M)$ den Vektorraum von Funktionen $f : M \to \mathbb{C}$, so dass

$$\#\{m \in M : f(m) \neq 0\} \leq \aleph_0,$$

und so dass

$$\|f\|_2^2 := \sum_{m \in M} |f(m)|^2 = \sum_{m : f(m) \neq 0} |f(m)|^2 < \infty.$$

Hierbei bezeichnet $\#A$ die Kardinalität einer Menge A und $\aleph_0 = \#\mathbb{N}$ ist die kleinste nicht endliche Kardinalität.

(a) Zeigen Sie, dass $\ell^2(M)$ ein Hilbertraum bezüglich $\|\cdot\|_2$ ist.

(b) Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\{x_j\}_{j \in J} \subset \{x \in \mathcal{H} : \|x\| = 1\}$ eine Familie in $\mathcal{H}$ mit $x_j \perp x_i$ für beliebige unterschiedliche $j, i \in J$. Zeigen Sie, dass $x_j \mapsto \mathbf{e}_j$, $\mathbf{e}_j(i) = \delta_{j,i}$ zu einem isometrischen Isomorphismus zwischen $\overline{\mathrm{Sp}\{x_j \mid j \in J\}}$ und $\ell^2(J)$ fortgesetzt werden kann.

Die Familie $\{x_j\}_{j \in J}$ heißt *Orthonormalbasis*, falls $\overline{\mathrm{Sp}\{x_j \mid j \in J\}} = \mathcal{H}$.

(c) Angenommen $\{x_j\}_{j \in J}$ und $\{y_i\}_{i \in I}$ sind Orthonormalbasen in $\mathcal{H}$. Zeigen Sie, dass $\#J = \#I$.

Hinweis: Sie dürfen die Identität $\#(X \cup Y) = \max\{\#X, \#Y\} = \#(X \times Y)$ benutzen, falls mindestens eine der Mengen nicht endlich ist. Beschränken Sie sich auf den unendlich dimensionalen Fall.

(d) Benutzen Sie Zorn's Lemma um zu zeigen, dass jeder Hilbertraum $\mathcal{H}$ eine Orthonormalbasis enthält. Ihre Kardinalität ist die *Hilbertraumdimension* von $\mathcal{H}$.

Dieses Gruppenübungsblatt wird am
Mittwoch, den 14.11.2018
besprochen.