Dr. Björn de Rijk
Jonas Brinker M.Sc.
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Funktionalanalysis (WS 2018/19)

Gruppenübungsblatt 6

Aufgabe 6.1.

Wir statten, wie üblich, $C^0([0,1],\mathbb{F})$ mit der Supremumnorm aus. Zeigen Sie, dass die folgenden Abbildungen $T\colon C^0([0,1],\mathbb{F}) \to C^0([0,1],\mathbb{F})$ linear und stetig sind und berechnen Sie deren Norm.

(a) $(Tf)(x) := f(x)g(x)$ für ein $g \in C^0([0,1],\mathbb{F})$;

(b) $(Tf)(x) := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)$ für $x_i \in [0,1]$ und $\alpha_i \in \mathbb{F}$;

(c) $(Tf)(x) := \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)$.

Aufgabe 6.2.

Sei X ein $\mathbb{F}$-Vektorraum und $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ Normen auf X. Sei X als normierter Raum bezüglich beider Normen vollständig.

(a) Zeigen Sie: Wenn ein $C > 0$ existiert mit $\|x\|_1 \leq C\|x\|_2$, für alle $x \in X$, dann sind die Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ bereits äquivalent.

(b) Zeigen Sie: Wenn für alle Folgen $\{x_n\}$ in X und $x, y \in X$ gilt

$$\Big(\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_1 = 0 \wedge \lim_{n\to\infty} \|x_n - y\|_2 = 0\Big) \Longrightarrow x = y,$$

dann sind die Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ äquivalent.

(c) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und seien $1 \leq p < q \leq \infty$. In der Höheren Analysis wurde gezeigt, dass ein $C > 0$ existiert mit $\|f\|_p \leq C\|f\|_q$ für alle $f \in L^q(\Omega)$. Sind $\|\cdot\|_p$ und $\|\cdot\|_q$ auf $L^q(\Omega)$ äquivalent?

Aufgabe 6.3.

Betrachten Sie die Integralgleichung

$$f(x) = g(x) + \int_0^1 xyf(y)\,\mathrm{d}y \tag{1}$$

in $C^0([0,1],\mathbb{F})$ mit $g \in C^0([0,1],\mathbb{F})$.

(a) Zeigen Sie, dass diese Gleichung zu jedem $g \in C^0([0,1],\mathbb{F})$ eine eindeutige Lösung $f \in C^0([0,1],\mathbb{F})$ besitzt. Interpretieren Sie dazu (1) als Gleichung

$$(I - T)f = g$$

mit einem geeigneten linearen Operator $T \in B\big(C^0([0,1],\mathbb{F})\big)$.

(b) Lösen Sie (1) für $g(x) = x$ und benutzen Sie das Ergebnis um eine einfache allgemeine Lösungsformel zu erhalten.

Universität Stuttgart

Dr. Björn de Rijk
Jonas Brinker M.Sc.
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Aufgabe 6.4.

Seien $X \subset \mathbb{R}^n$ und $Y \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen und seien $K\colon X \times Y \to \mathbb{R}$, $p\colon X \to \mathbb{R}$ und $q\colon Y \to \mathbb{R}$ Lebesgue messbare Funktionen, so dass $p(x), q(y) > 0$ fast überall. Wir statten, wie üblich, $L^2(X,\mathbb{R})$ und $L^2(Y,\mathbb{R})$ mit der 2-Norm aus. Beweisen Sie den folgenden Satz.

Satz. *Angenommen es existieren $\alpha, \beta > 0$ so dass*

$$\int_Y |K(x,y)|\, q(y)\,\mathrm{d}y \le \alpha\, p(x) \quad \textit{and} \quad \int_X |K(x,y)|\, p(x)\,\mathrm{d}x \le \beta\, q(y)$$

für fast alle $y \in Y$ bzw. fast alle $x \in X$ gilt. Dann ist der durch

$$(Tf)(x) := \int_Y K(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y,$$

definierte lineare Operator $T : \mathrm{L}^2(Y,\mathbb{R}) \to \mathrm{L}^2(X,\mathbb{R})$ stetig und seine Norm kann durch $\|T\| \le \sqrt{\alpha\beta}$ abgeschätzt werden.

Aufgabe 6.5. (Bonus)

Sei X ein nichttrivialer Vektorraum und $P, Q\colon X \to X$ lineare Abbildungen mit der Eigenschaft $PQ - QP = I$.

(a) Wir nehmen an X ist ein normierter Raum. Zeigen Sie, dass dann nicht P und Q stetig sein können.
Hinweis: Zeigen Sie $PQ^n - Q^nP = nQ^{n-1}$.

(b) Geben Sie ein Beispiel an für X, Q und P, so dass auf X eine Topologie (bzw. Metrik) definiert ist mit den folgenden Eigenschaften:

1. $X \times X \to X\colon (x,y) \mapsto x + y$ und $\mathbb{F} \times Y \to X\colon (\alpha, x) \mapsto \alpha x$ sind stetig.
2. P und Q sind stetig.

Anmerkung: Die obige Relation zwischen P und Q ist eine Form der kanonischen Kommutatorrelation aus der Quantenmechnik. Die Aufgabe zeigt, warum nicht sowohl der Orts- als auch der Impulsoperator stetig gewählt werden können.

Dieses Gruppenübungsblatt wird am
Mittwoch, den 21.11.2018
besprochen.