Universität Stuttgart

Dr. Björn de Rijk
Jonas Brinker M.Sc.
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Funktionalanalysis (WS 2018/19)

Gruppenübungsblatt 7

Aufgabe 7.1.

Seien $(Y, \|\cdot\|_Y)$ und $(Z, \|\cdot\|_Z)$ normierte Räume und sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum. Sei $\alpha \colon X \times Y \to Z$ bilinear oder sesquilinear. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

1. $\alpha \colon X \times Y \to Z$ ist stetig.
2. α is separat stetig, d.h.
$$Y \to Z \colon y \mapsto \alpha(x, y) \quad \text{und} \quad X \to Z \colon x \mapsto \alpha(x, y)$$
sind stetig für jedes $x \in X$ bzw. für jedes $y \in Y$.
3. Es existert eine Konstante $C > 0$, so dass $\|\alpha(x, y)\|_Z \leq C\|x\|_X\|y\|_Y$ für alle $(x, y) \in X \times Y$.

Hinweis: Nutzen sie das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit.

Aufgabe 7.2.

Sei $\mathfrak{m}$ die Menge aller Funktionen $\mu \colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{F}$ mit $\sup\{|\mu(A)| \mid A \subset \mathbb{N}\} < \infty$ und $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ falls $A \cap B = \varnothing$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) $(\mathfrak{m}, \|\cdot\|_{\mathfrak{m}})$ mit den operationen
$$(\mu + c\nu)(A) = \mu(A) + c\nu(A) \qquad \text{für } \mu, \nu \in \mathfrak{m} \text{ und } c \in \mathbb{F}$$
und $\|\mu\|_{\mathfrak{m}} = \sup\{|\mu(A)| \mid A \subset \mathbb{N}\}$ ist ein normierter Raum.

(b) Der Teilraum der Folgen $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $x_n \in \mathbb{F}$, die nur endlich viele Werte annehmen, ist dicht in ℓ^∞.

(c) Die Abbildung $T \colon (\ell^\infty)' \to \mathfrak{m}$ gegeben durch $(T\varphi)(A) = \langle \varphi, \chi_A \rangle$, wobei χ_A die charakteristische Folge zu $A \subset \mathbb{N}$ ist, ist einen Isomorphismus.
Hinweis: Benutzen Sie das Fortsetzungslemma.

(Dies entspricht einer Vereinfachung eines Theorems von Hildebrandt/Kantorovich.)

Aufgabe 7.3.

Wir betrachten den Raum c der konvergenten Folgen und dessen Teilraum c_0 der Nullfolgen (ausgestattet mit der Supremumsnorm).

(a) Zeigen Sie, dass ein isometrischer Isomorphismus zwischen c_0' und ℓ^1 existiert.

(b) Beweisen Sie, dass $\phi(x) := \lim_{j \to \infty} x_j$ ein stetiges Funktional auf c definiert.

(c) Zeigen Sie, dass ein isometrischer Isomorphismus zwischen c' und ℓ^1 existiert.

Hinweis: Erinnern Sie sich an den Beweis, dass $(\ell^p)'$ isometrisch isomorph zu ℓ^q ist wobei $1 \leq p < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Aufgabe 7.4.

Sei S eine konvexe Teilmenge eines Vektorraums. Ein *Extremalpunkt* von S ist ein Element $x \in S$, so dass $x \neq ty + (1-t)z$ für alle $y, z \in S$, $y \neq z$ und $t \in (0,1)$.

a) Zeigen Sie, dass die abgeschlossene Einheitskugel in c_0 keine Extremalpunkte hat.

b) Zeigen Sie, dass die abgeschlossene Einheitskugel in c Extremalpunkte hat.

c) Schlussfolgern Sie, dass kein isometrischer isomorphismus von c nach c_0 existiert (aber c' isometrisch isomorph zu c_0' ist).

Aufgabe 7.5. (Bonus)

Definition. *Seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banachräume, $U \subset X$ offen und $F\colon U \to Y$ eine Abbildung.*

i) F heißt Gâteaux-differenzierbar an der Stelle $x \in U$, wenn die sogenannte Gâteaux-Ableitung $DF(x)[v]$ von F in Richtung $v \in X$, welche definiert ist durch

$$DF(x)[v] := \lim_{\substack{h\in\mathbb{R}\\ h\to 0}} \frac{F(x+hv) - F(x)}{h},$$

für alle $v \in X$ existiert.

ii) F heißt Fréchet-differenzierbar an der Stelle $x \in U$, wenn eine stetige, lineare Abbildung $JF(x)\colon X \to Y$ existiert, so dass

$$\lim_{\substack{v\in X\\ v\to 0}} \frac{\|F(x+v) - F(x) - JF(x)[v]\|_Y}{\|v\|_X} = 0$$

gilt.

Die Gâteaux-Ableitung ist die Verallgemeinerung der Richtungsableitung und Fréchet-Differenzierbarkeit ist die Verallgemeinerung der totalen Differenzierbarkeit aus der reellen Differentialrechnung.

Sei $(H, (\cdot,\cdot))$ ein reeller Hilbertraum und $A \subseteq H$ abgeschlossen, konvex und nichtleer. Sei außerdem $\phi\colon H \to \mathbb{R}$ ein stetige Funktional und $E\colon H \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$E(x) := \frac{1}{2}(x,x) - \phi(x).$$

(a) Zeigen Sie ohne Verwendung des Rieszschen Darstellungssatzes, dass E auf A ein eindeutiges Minimum annimmt.

Hinweis: Passen Sie den Beweis zur Existenz der Bestapproximation an.

(b) Bestimmen Sie für E die Gâteaux- und Fréchet-Ableitungen, sofern sie existieren. Was lasst sich über die Werte der Gâteaux- und Fréchet-Ableitungen an der Stelle $x_0 \in A$, an der E das Minimum annimmt, aussagen?

Dieses Gruppenübungsblatt wird am **Mittwoch, den 28.11.2018** besprochen.