Universität Stuttgart

Dr. Björn de Rijk
Jonas Brinker M.Sc.
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Funktionalanalysis (WS 2018/19)

Gruppenübungsblatt 8

Aufgabe 8.1.

Wir betrachten den Banachraum ℓ^∞ mit seiner üblichen Supremumsnorm. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Es existiert ein $\phi \in (\ell^\infty)'$ mit $\phi(x) = \lim_{n\to\infty} x_n$ für alle konvergenten Folgen $x = \{x_n\} \in \ell^\infty$.

(b) Es existiert ein $\phi \in (\ell^\infty)'$ mit $\phi(x) = \sum_{n=1}^\infty x_n$ für alle Folgen $x = \{x_n\} \in \ell^\infty$, deren Reihe $\sum_{n=1}^\infty x_n$ konvergiert.

(c) Es existeren zwei unterschiedliche $\phi, \psi \in (\ell^\infty)'$, die den Anforderungen aus **(a)** genügen.

(d) Es existiert $\phi \in (\ell^\infty)' \setminus \{0\}$ mit $\phi(e_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei $e_n := \{\delta_{k,n}\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit dem Kronecker-Delta $\delta_{k,n}$.

Aufgabe 8.2.

(a) Sei C eine konvexe, nichtleere Teilmenge eines reellen normierten Raumes $(X, \|\cdot\|)$ und sei

$$H_C = \{(\phi, \gamma) \in X' \times \mathbb{R} \mid \phi(x) \leq \gamma \text{ für alle } x \in C\},$$

die Kollektion der Halbräume die C enthalten. Zeigen Sie, dass der Abschluss von C geshrieben werden kann als der Durchsnitt

$$\overline{C} = \bigcap_{(\phi,\gamma)\in H_C} \phi^{-1}((-\infty, \gamma]),$$

dieser Halbräume.

(b) Geben Sie ein Beispiel für $(X, \|\cdot\|)$ und eine nicht konvexe Teilmenge C, so dass die obige Identität nicht gilt.

Aufgabe 8.3.

Sei X ein normierte Raum. Beweisen Sie:

(a) Ist die Kodimension von einem abgeschlossenen Teilraum U in X endlich, dann existiert eine stetige Projektion $P\colon X \to X$ mit $P(X) = U$.

Hinweis: Benutzen Sie die stetige Abbildung $X \to X/U\colon x \mapsto x + U$.

(b) Ein Teilraum M ist genau dann dicht in X, wenn

$$M^\circ := \{\phi \in X' \mid \phi(x) = 0 \text{ für alle } x \in M\} = \{0\}.$$

Dr. Björn de Rijk
Jonas Brinker M.Sc.
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Aufgabe 8.4.

Sei X ein normierte Raum. Beweisen Sie:

(a) Hat ein Teilraum $U \subset X$ die Kodimension 1, dann ist U entweder abgeschlossen oder dicht in X.

(b) Ein lineares Funktional $\phi\colon X \to \mathbb{F}$ ist entweder stetig, oder $\ker(\phi)$ ist dicht in X.

(c) Es existert ein unstetiges lineares Funktional $\phi\colon X \to \mathbb{F}$, wenn $\dim X = \infty$.
Hinweis: Benutzen Sie, dass jeder Vektorraum eine Basis besitzt.

Aufgabe 8.5. (Bonus)

In dieser Aufgabe beweisen wir, dass es keinen stetigen Operator $T\colon \ell^\infty \to \ell^\infty$ gibt mit $\ker(T) = c_0$.

(a) Sei $T\colon \ell^\infty \to \ell^\infty$. Zeigen Sie, dass

$$\ker(T) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \ker(e_n' \circ T),$$

wobei $e_n' \in (\ell^\infty)'$ mit $e_n'(x) = x_n$ für $x = \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$.

Sei im Folgenden χ_A die charakteristische Folge zu einer Teilmenge $A \subset \mathbb{N}$ und $\{N_\alpha\}_{\alpha\in I}$ eine überabzählbare Familie von unendlichen Teilmengen $N_\alpha \subset \mathbb{N}$, so dass $N_\alpha \cap N_\beta$ für $\alpha \neq \beta$ endlich ist.[1]

(b) Beweisen Sie, dass $\{\alpha \in I \mid \phi(\chi_{N_\alpha}) \neq 0\}$ für jedes $\phi \in (\ell^\infty)'$ mit $c_0 \subset \ker(\phi)$ abzählbar ist.
Hinweis: Zeigen Sie, dass die Mengen $\{\alpha \in I \mid |\phi(\chi_{N_\alpha})| \geq 1/n\}$ endlich sind.

(c) Zeigen Sie, dass für jede Folge $\{\phi_n\} \subset (\ell^\infty)'$, mit $c_0 \subset \ker(\phi_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, mindestens ein $\alpha \in I$ existiert, so dass $\chi_{N_\alpha} \in \cap_{n\in\mathbb{N}} \ker(\phi_n)$.

(d) Folgern Sie daraus, dass für $T\colon \ell^\infty \to \ell^\infty$ linear und stetig gilt $c_0 \neq \ker(T)$.

Dieses Gruppenübungsblatt wird am **Mittwoch, den 5.12.2018** besprochen.

[1] Diese kann über eine Abzählung von $\mathbb{Q}$ und deren gegen reelle Zahlen konvergierenden Teilfolgen konstruiert werden. Dies müssen Sie jedoch nicht machen.