Universität Stuttgart

Dr. Björn de Rijk
Jonas Brinker M.Sc.
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Funktionalanalysis (WS 2018/19)

Gruppenübungsblatt 9

Aufgabe 9.1.

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $\{e_n\}$ eine ONB in $\mathcal{H}$, $c = \{c_n\} \in \ell^\infty$ und T_c der durch

$$T_c x := \sum_{n=1}^{\infty} c_n (x, e_n) e_n$$

definierte stetige lineare Operator auf $\mathcal{H}$. Charakterisieren Sie jeweils alle Folgen c, für welche die folgenden Aussagen gelten.

(a) T_c ist normal.

(b) T_c is selbstadjungiert.

(c) T_c ist positiv.

(d) T_c ist eine Isometrie.

(e) T_c ist kompakt.

Aufgabe 9.2.

Seien X und Y Banachräume und $A\colon X \to Y$ und $B\colon Y' \to X'$ lineare Abbildungen mit $\phi(Ax) = (B\phi)(x)$ für alle $x \in X$ und $\phi \in Y'$.

Zeigen Sie, dass A und B stetig sind.

Hinweis: Benutzen Sie das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit.

Aufgabe 9.3.

Seien $\mathcal{H}$ und $\mathcal{K}$ Hilberträume und $U \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. Die lineare Abbildung U ist eine *partielle Isometrie*, falls $\|Ux\|_{\mathcal{K}} = \|x\|_{\mathcal{H}}$ für alle $x \in \ker(U)^\perp$.

Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Ist U eine partielle Isometrie, dann ist U^*U eine Projektion in $B(\mathcal{H})$, deren Bild und Kern durch $\ker(U)^\perp$ und $\ker(U)$ gegeben sind.

(b) U ist genau dann eine partielle Isometrie, wenn U^*U eine Projektion in $B(\mathcal{H})$ ist.

(c) U ist genau dann eine partielle Isometrie, wenn $UU^*U = U$.

Aufgabe 9.4.

Wir betrachten zwei nicht triviale Banachräume X und W, so dass ein isometrischer Isomorphismus zwischen W' und X existiert.

(a) Zeigen Sie, dass eine Projektion $P \in B(X'')$ existiert, mit Bild $P(X'') = J_X(X)$ und $\|P\| = 1$, wobei $J_X\colon X \to X''$ die kanonische Einbettung ist.

(b) Begründen Sie warum c_0 (ausgestattet mit der Supremumsnorm) nicht isometrisch isomorph zu irgendeinem Dualraum eines normierten Raums ist.

Hinweis: Sie können Aufgabe 8.5 verwenden.

Dr. Björn de Rijk
Jonas Brinker M.Sc.
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Aufgabe 9.5. (Bonus)

Sei X ein reflexiver Banachraum und $\{T_n\}$ eine Folge in $B(X)$, so dass die Folge der Koeffizienten $\{\phi(T_n x)\}$ für jedes $\phi \in X'$ und jedes $x \in X$ in $\mathbb{F}$ konvergiert.

(a) Beweisen Sie $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$.
Hinweis: Wenden Sie das Prinzip der gleichmäßigen Beschränkheit an.

(b) Durch $(Sx)(\phi) := \lim_{n\to\infty} \phi(T_n x)$ wird ein Operator $S \in B(X, X'')$ definiert. Beweisen Sie dies.

(c) Schlussfolgen Sie, dass ein Operator $T \in B(X)$ existiert, mit $\phi(Tx) = \lim_{n\to\infty} \phi(T_n x)$ für alle $\phi \in X'$ und $x \in X$.

Dieses Gruppenübungsblatt wird am **Mittwoch, den 12.12.2018** besprochen.