

Funktionalanalysis (WS 2018/19)  
Gruppenübungsblatt 9

**Aufgabe 9.1.**

Sei  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum,  $\{e_n\}$  eine ONB in  $\mathcal{H}$ ,  $c = \{c_n\} \in \ell^\infty$  und  $T_c$  der durch

$$T_c x := \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x, e_n) e_n$$

definierte stetige lineare Operator auf  $\mathcal{H}$ . Charakterisieren Sie jeweils alle Folgen  $c$ , für welche die folgenden Aussagen gelten.

- (a)  $T_c$  ist normal.
- (b)  $T_c$  ist selbstadjungiert.
- (c)  $T_c$  ist positiv.
- (d)  $T_c$  ist eine Isometrie.
- (e)  $T_c$  ist kompakt.

**Aufgabe 9.2.**

Seien  $X$  und  $Y$  Banachräume und  $A: X \rightarrow Y$  und  $B: Y' \rightarrow X'$  lineare Abbildungen mit  $\phi(Ax) = (B\phi)(x)$  für alle  $x \in X$  und  $\phi \in Y'$ .

Zeigen Sie, dass  $A$  und  $B$  stetig sind.

*Hinweis:* Benutzen Sie das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit.

**Aufgabe 9.3.**

Seien  $\mathcal{H}$  und  $\mathcal{K}$  Hilberträume und  $U \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ . Die lineare Abbildung  $U$  ist eine *partielle Isometrie*, falls  $\|Ux\|_{\mathcal{K}} = \|x\|_{\mathcal{H}}$  für alle  $x \in \ker(U)^\perp$ .

Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

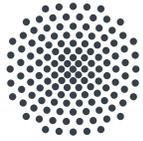
- (a) Ist  $U$  eine partielle Isometrie, dann ist  $U^*U$  eine Projektion in  $B(\mathcal{H})$ , deren Bild und Kern durch  $\ker(U)^\perp$  und  $\ker(U)$  gegeben sind.
- (b)  $U$  ist genau dann eine partielle Isometrie, wenn  $U^*U$  eine Projektion in  $B(\mathcal{H})$  ist.
- (c)  $U$  ist genau dann eine partielle Isometrie, wenn  $UU^*U = U$ .

**Aufgabe 9.4.**

Wir betrachten zwei nicht triviale Banachräume  $X$  und  $W$ , so dass ein isometrischer Isomorphismus zwischen  $W'$  und  $X$  existiert.

- (a) Zeigen Sie, dass eine Projektion  $P \in B(X'')$  existiert, mit Bild  $P(X'') = J_X(X)$  und  $\|P\| = 1$ , wobei  $J_X: X \rightarrow X''$  die kanonische Einbettung ist.
- (b) Begründen Sie warum  $c_0$  (ausgestattet mit der Supremumsnorm) nicht isometrisch isomorph zu irgendeinem Dualraum eines normierten Raums ist.

*Hinweis:* Sie können Aufgabe 8.5 verwenden.



**Aufgabe 9.5. (Bonus)**

Sei  $X$  ein reflexiver Banachraum und  $\{T_n\}$  eine Folge in  $B(X)$ , so dass die Folge der Koeffizienten  $\{\phi(T_n x)\}$  für jedes  $\phi \in X'$  und jedes  $x \in X$  in  $\mathbb{F}$  konvergiert.

(a) Beweisen Sie  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$ .

*Hinweis:* Wenden Sie das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit an.

(b) Durch  $(Sx)(\phi) := \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(T_n x)$  wird ein Operator  $S \in B(X, X'')$  definiert. Beweisen Sie dies.

(c) Schlussfolgen Sie, dass ein Operator  $T \in B(X)$  existiert, mit  $\phi(Tx) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(T_n x)$  für alle  $\phi \in X'$  und  $x \in X$ .