Universität Stuttgart

Dr. Björn de Rijk
Jonas Brinker M.Sc.
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Funktionalanalysis (WS 2018/19)

Gruppenübungsblatt 10

Aufgabe 10.1.

Es seien X und Y Banachräume. Ein linearer Operator $T\colon X \to Y$ heißt *nuklear*, falls es eine Folge $\{\lambda_n\}$ in ℓ^1 und beschränkten Folgen $\{y_n\}$ in Y und $\{\phi_n\}$ in X' gibt, so dass

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \, y_n \, \phi_n(x), \text{ für alle } x \in X.$$

(a) Zeigen Sie, dass jeder nukleare Operator $T\colon X \to Y$ kompakt ist.

(b) Beweisen Sie, dass für eine stetige, lineare Projektion $P\colon X \to X$ Folgendes äquivalent ist:

(i) P ist kompakt (ii) P ist nuklear (iii) $\dim P(X) < \infty$

Anmerkung: Die Umkehrung von **(a)** ist im Allgemeinen (selbst in separablen unendlichdimensionalen Hilberträumen) nicht wahr. Können Sie das begründen?

Aufgabe 10.2.

Wir betrachten zwei separable Hilberträume $\mathcal{H}$ und $\mathcal{K}$. Ein linearer Operator $T\colon \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ heißt *Hilbert-Schmidt*, falls $\sum_{j=1}^{\infty} \|Te_j\|_{\mathcal{K}}^2 < \infty$ für ein (und damit jede) Orthonormalbasis $\{e_j\}$ von $\mathcal{H}$.

(a) Jeder Hilbert-Schmidt-Operator ist kompakt. Beweisen Sie dies.

(b) Seien nun $A, B \subset \mathbb{R}^n$ offen, sowie $\mathcal{H} = L^2(A, \mathbb{F})$, $\mathcal{K} = L^2(B, \mathbb{F})$ und sei $T\colon \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ definiert durch

$$Tf(x) := \int_A K(x,y) f(y) \, \mathrm{d}y, \text{ für fast alle } x \in B, \tag{1}$$

für ein $K \in L^2(B \times A, \mathbb{F})$. Zeigen Sie, dass T ein Hilbert-Schmidt-Operator ist.

Anmerkung: Die Teilaufgabe **(b)** kann analog für allgemeine σ-endliche Maßräume A, B bewiesen werden. Die Umkehrung von **(b)** ist auch wahr. D.h. jeder Hilbert-Schmidt-Operator zwischen den L^2-Räumen lässt sich wie in (1) darstellen.

Dr. Björn de Rijk
Jonas Brinker M.Sc.
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Aufgabe 10.3.

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$ und sei $F\colon [0,1] \to \mathcal{H}$ eine stetige Funktion.

(a) Beweisen Sie, dass ein eindeutiger Operator $T \in B(\mathcal{H})$ existiert, so dass

$$(Tx, y) = \int_0^1 (x, F(t))(F(t), y)\,\mathrm{d}t, \text{ für alle } x, y \in \mathcal{H}.$$

(b) Zeigen Sie, dass der Operator T positiv ist.

(c) Der Operator T ist außerdem kompakt. Beweisen Sie dies.

Aufgabe 10.4.

Seien $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ jeweils Orthogonalfolgen in $L^2([0,1],\mathbb{F})$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\|\|b_n\| < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir untersuchen die Gleichung

$$f - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^1 \overline{b_n(t)} f(t)\,\mathrm{d}t = g \tag{2}$$

für $g \in L^2([0,1],\mathbb{F})$ auf Lösbarkeit.

(a) Geben Sie Kriterien an $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$, so dass zu jedem $g \in L^2([0,1],\mathbb{F})$ genau eine Lösung $f \in L^2([0,1],\mathbb{F})$ zu (2) existiert.

(b) Angenommen (2) ist nicht für alle $g \in L^2([0,1],\mathbb{F})$ eindeutig lösbar. Zu welchen $g \in L^2([0,1],\mathbb{F})$ existiert eine Lösung $f \in L^2([0,1],\mathbb{F})$?

Aufgabe 10.5. (Bonus)

Seien $p, q \in (1,\infty)$ mit $pq = p + q$. Wir wählen eine Doppelfolge $\{a_{i,j}\}_{i,j}$ in $\mathbb{F}$, so dass $\sum_{i=1}^{\infty}(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{i,j}|^q)^{p/q} < \infty$ und definieren den zugehörigen Operator

$$T\colon \ell^p \to \ell^p\colon x \mapsto \sum_{i,j=1}^{\infty} e_i\, a_{i,j} x_j,$$

mit den üblichen Konventionen $e_j = \{\delta_{j,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

(a) Zeigen Sie, dass T kompakt ist.

(b) Nehmen Sie nun an, dass $\{a_{i,j}\}$ die Gestalt einer unteren Dreiecksmatrix hat (d.h. $a_{i,j} = 0$ für $i < j$). Beweisen Sie, dass $I - T$ genau dann invertierbar ist, wenn $a_{i,i} \neq 1$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

(c) Formulieren Sie Teilaufgabe **(b)** im Sinne der Fredholmschen Alternative.

Dieses Gruppenübungsblatt wird am **Mittwoch, den 19.12.2018** besprochen.