Universität Stuttgart

Dr. Björn de Rijk
Jonas Brinker M.Sc.
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Funktionalanalysis (WS 2018/19)

Gruppenübungsblatt 11

Dieses Aufgabenblatt soll der Wiederholung der bis jetzt behandelten Themen dienen. Finden Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel zu den aufgelisteten Aussagen. Im Folgenden sind E, F, G normierte Räume und H ist ein Hilbertraum. Vier bearbeitete Aussagen entsprechen einem Votierpunkt. Insgesamt gibt es **5 Votierpunkte + 1 Bonuspunkt**.

1. $B(F,G) \times B(E,F) \to B(E,G) \colon (A,B) \mapsto AB$ ist stetig.

2. Sei $E \neq \{0\}$. Ist $B(E,F)$ ein Banachraum, so ist auch F ein Banachraum.

3. Ist E separabel, so ist auch $B(E)$ separabel.

4. Seien (X,d) ein metrischer Raum und $A \subset X$ nicht leer. Dann ist $f\colon X \to \mathbb{R}$, $f(x) := \inf\{d(x,y) \mid y \in A\}$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante 1.

5. Ist $T \in B(E,F)$, so sind $\ker T = \{x \in E \mid Tx = 0\} \subset E$ und $T(E) = \{Tx \mid x \in E\} \subset F$ abgeschlossen.

6. Sei $P \in B(H)$ eine Projektion. Dann $\operatorname{Im} P \perp \ker P \Leftrightarrow P$ ist selbstadjungiert.

7. Die Einbettung $(C^{0,\beta}([0,1],\mathbb{F}), \|\cdot\|_{C^{0,\beta}}) \to (C^{0,\alpha}([0,1],\mathbb{F}), \|\cdot\|_{C^{0,\alpha}}) \colon f \mapsto f$ ist kompakt für $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$.

8. Es gilt $L^p(\mathbb{R}^n,\mathbb{F}) \subset L^q(\mathbb{R}^n,\mathbb{F})$ für $1 \leq q < p$.

9. Aus $f \in L^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{F})$ folgt $f(x) \to 0$ für $|x| \to \infty$.

10. $S \in B(H)$ ist genau dann positiv, wenn $(Sx,x) \geq 0$ für alle $x \in H$.

11. Seien E vollständig und $S,T \in B(E)$. Ist ST oder TS invertierbar, dann ist T invertierbar.

12. Seien E vollständig, $S \in B(E)$ und $T \in K(E)$. Ist $S(I-T)$ oder $(I-T)S$ invertierbar, dann ist $I-T$ invertierbar.

13. Seien $S,T \in B(E)$ mit $ST = 0$. Dann folgt $S = 0$ oder $T = 0$.

14. Zwei beliebige unendlich dimensionale und separable Hilberträume H_1 und H_2 sind isometrisch-isomorph.

15. Sei $\{x_n\} \subset H$ eine orthonormale Folge. Dann gilt $\lim_{n\to\infty}(x_n,y) = 0$, für alle $y \in H$.

16. Sei $T \in B(\ell^2)$ mit $T(x_1,x_2,x_3,x_4,\dots) = (-x_2,x_1,-x_4,x_3,\dots)$, dann $\sigma(T) = \{\mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$.

17. Seien E,F,G Banachräume, $A \in B(E,G)$ und $B \in B(F,G)$. Existiert zu jedem $x \in E$ genau ein $y \in F$ mit $Ax = By$, so ist $C\colon E \to F, x \mapsto y$ beschränkt.

Dr. Björn de Rijk
Jonas Brinker M.Sc.
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

18. Seien H ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum und $T \in B(H)$, dann $\sigma_p(T^*) = \{\overline{\lambda} \mid \lambda \in \sigma_p(T)\}$.

19. Seien H ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum und $T \in B(H)$ normal, dann $\sigma_p(T^*) = \{\overline{\lambda} \mid \lambda \in \sigma_p(T)\}$.

20. Sei $Y \subset E$ ein abgeschlossener Teilraum. Für alle $f \in Y'$ existiert eine eindeutige Fortsetzung $\tilde{f} \in E'$ mit $\|\tilde{f}\| = \|f\|$.

21. Sei $Y \subset H$ ein abgeschlossener Teilraum. Für alle $f \in Y'$ existiert eine eindeutige Fortsetzung $\tilde{f} \in H'$ mit $\|\tilde{f}\| = \|f\|$.

***22.** Sei E ein Banachraum bezüglich der Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$. Dann sind beide Normen äquivalent.

***23.** Sei E ein normierter Raum über $\mathbb{R}$ und seien $A, B \subset E$ nicht leer, konvex und disjunkt. Es existiert $f \in E' \setminus \{0\}$ mit $f(a) \leq f(b)$ für alle $a \in A$, $b \in B$.

***24.** Sei $S \in B(\ell^\infty)$ der Linksshift-Operator $S(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$. Es existiert $f \in (\ell^\infty)' \setminus \{0\}$ so dass $f(x) = f(Sx)$ für alle $x \in \ell^\infty$.

Hinweis: 13 der Aussagen sind wahr.

Dieses Gruppenübungsblatt wird am **Mittwoch, den 9.1.2019** besprochen.