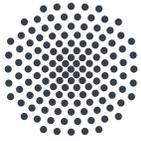


Funktionalanalysis (WS 2018/19)  
Gruppenübungsblatt 11

Dieses Aufgabenblatt soll der Wiederholung der bis jetzt behandelten Themen dienen. Finden Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel zu den aufgelisteten Aussagen. Im Folgenden sind  $E, F, G$  normierte Räume und  $H$  ist ein Hilbertraum. Vier bearbeitete Aussagen entsprechen einem Votierpunkt. Insgesamt gibt es **5 Votierpunkte + 1 Bonuspunkt**.

1.  $B(F, G) \times B(E, F) \rightarrow B(E, G): (A, B) \mapsto AB$  ist stetig.
2. Sei  $E \neq \{0\}$ . Ist  $B(E, F)$  ein Banachraum, so ist auch  $F$  ein Banachraum.
3. Ist  $E$  separabel, so ist auch  $B(E)$  separabel.
4. Seien  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $A \subset X$  nicht leer. Dann ist  $f: X \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := \inf\{d(x, y) \mid y \in A\}$  Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante 1.
5. Ist  $T \in B(E, F)$ , so sind  $\ker T = \{x \in E \mid Tx = 0\} \subset E$  und  $T(E) = \{Tx \mid x \in E\} \subset F$  abgeschlossen.
6. Sei  $P \in B(H)$  eine Projektion. Dann  $\operatorname{Im} P \perp \ker P \Leftrightarrow P$  ist selbstadjungiert.
7. Die Einbettung  $(C^{0,\beta}([0, 1], \mathbb{F}), \|\cdot\|_{C^{0,\beta}}) \rightarrow (C^{0,\alpha}([0, 1], \mathbb{F}), \|\cdot\|_{C^{0,\alpha}}): f \mapsto f$  ist kompakt für  $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$ .
8. Es gilt  $L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}) \subset L^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})$  für  $1 \leq q < p$ .
9. Aus  $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})$  folgt  $f(x) \rightarrow 0$  für  $|x| \rightarrow \infty$ .
10.  $S \in B(H)$  ist genau dann positiv, wenn  $(Sx, x) \geq 0$  für alle  $x \in H$ .
11. Seien  $E$  vollständig und  $S, T \in B(E)$ . Ist  $ST$  oder  $TS$  invertierbar, dann ist  $T$  invertierbar.
12. Seien  $E$  vollständig,  $S \in B(E)$  und  $T \in K(E)$ . Ist  $S(I - T)$  oder  $(I - T)S$  invertierbar, dann ist  $I - T$  invertierbar.
13. Seien  $S, T \in B(E)$  mit  $ST = 0$ . Dann folgt  $S = 0$  oder  $T = 0$ .
14. Zwei beliebige unendlich dimensionale und separable Hilberträume  $H_1$  und  $H_2$  sind isometrisch-isomorph.
15. Sei  $\{x_n\} \subset H$  eine orthonormale Folge. Dann gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y) = 0$ , für alle  $y \in H$ .
16. Sei  $T \in B(\ell^2)$  mit  $T(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \dots)$ , dann  $\sigma(T) = \{i, -i\}$ .
17. Seien  $E, F, G$  Banachräume,  $A \in B(E, G)$  und  $B \in B(F, G)$ . Existiert zu jedem  $x \in E$  genau ein  $y \in F$  mit  $Ax = By$ , so ist  $C: E \rightarrow F, x \mapsto y$  beschränkt.



18. Seien  $H$  ein  $\mathbb{C}$ -Hilbertraum und  $T \in B(H)$ , dann  $\sigma_p(T^*) = \{\bar{\lambda} \mid \lambda \in \sigma_p(T)\}$ .
19. Seien  $H$  ein  $\mathbb{C}$ -Hilbertraum und  $T \in B(H)$  normal, dann  $\sigma_p(T^*) = \{\bar{\lambda} \mid \lambda \in \sigma_p(T)\}$ .
20. Sei  $Y \subset E$  ein abgeschlossener Teilraum. Für alle  $f \in Y'$  existiert eine eindeutige Fortsetzung  $\tilde{f} \in E'$  mit  $\|\tilde{f}\| = \|f\|$ .
21. Sei  $Y \subset H$  ein abgeschlossener Teilraum. Für alle  $f \in Y'$  existiert eine eindeutige Fortsetzung  $\tilde{f} \in H'$  mit  $\|\tilde{f}\| = \|f\|$ .
- \*22. Sei  $E$  ein Banachraum bezüglich der Normen  $\|\cdot\|_1$  und  $\|\cdot\|_2$ . Dann sind beide Normen äquivalent.
- \*23. Sei  $E$  ein normierter Raum über  $\mathbb{R}$  und seien  $A, B \subset E$  nicht leer, konvex und disjunkt. Es existiert  $f \in E' \setminus \{0\}$  mit  $f(a) \leq f(b)$  für alle  $a \in A, b \in B$ .
- \*24. Sei  $S \in B(\ell^\infty)$  der Linksshift-Operator  $S(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$ . Es existiert  $f \in (\ell^\infty)' \setminus \{0\}$  so dass  $f(x) = f(Sx)$  für alle  $x \in \ell^\infty$ .

*Hinweis:* 13 der Aussagen sind wahr.