Universität Stuttgart

Dr. Björn de Rijk
Jonas Brinker M.Sc.
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Funktionalanalysis (WS 2018/19)

Gruppenübungsblatt 12

Aufgabe 12.1.

Sei $\mathcal{H}$ ein komplexer Hilbertraum und sei $T \in K(\mathcal{H})$ ein normaler operator. Sei außerdem $\{e_n\}_{n\in I}$, $I \subset \mathbb{N}$, eine ONB von $(\ker T)^{\perp}$, bestehend aus Eigenvektoren zu Eigenwerten $\{\lambda_n\}_{n\in I}$ von T, und sei $h \in \mathcal{H}$ ein beliebiger Vektor. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

(i) Es existiert eine Lösung $f \in \mathcal{H}$ zu $Tf = h$.

(ii) $h \perp \ker T$ und $\sum_{n\in I} |\lambda_n|^{-2} |(h, e_n)|^2 < \infty$.

Aufgabe 12.2.

Sei X ein komplexer Banachraum und $S, T \in B(X)$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Ist T nilpotent, d.h. $T^n = 0$ für ein $n \in N$, dann $\sigma(T) = \{0\}$.

(b) Ist $\sigma(T) = \{0\}$, dann ist T nilpotent.

(c) Ist X ein Hilbertraum, T selbstadjungiert und $\|T\| \leq 1$, dann ist $I - T$ positiv.

(d) Ist $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{0\}$ abzählbar und 0 der einzige Häufungspunkt von $\sigma(T)$, dann ist T ein kompakter Operator.

(e) $\sigma(ST) \cup \{0\} = \sigma(TS) \cup \{0\}$.
Hinweis: Schreiben Sie $(I - ST)^{-1}$ für $\|S\|, \|T\| < 1$ als geometrische Reihe und finden Sie so eine Formel für $(I - TS)^{-1}$.

Aufgabe 12.3.

Sei M ein nicht-leerer kompakter metrischer Raum und betrachte den komplexen Banachraum $C(M, \mathbb{C})$ mit der üblichen Supremumsnorm. Wir wählen ein $h \in C(M, \mathbb{C})$ und definieren den stetigen Multiplikationsoperator $T\colon C(M, \mathbb{C}) \to C(M, \mathbb{C})$ mit $Tf = h \cdot f$.

(a) Zeigen Sie, dass $\sigma(T) = h(M)$.

(b) Beweisen Sie, dass $\lambda \in \mathbb{C}$ genau dann ein Eigenwert von T ist, wenn die Niveaumenge $\{x \in M \mid h(x) = \lambda\}$ einen inneren Punkt hat.

(c) Sei $\Sigma \subset \mathbb{C}$ eine beliebige kompakte, nicht-leere Menge. Zeigen Sie, dass ein komplexer Banachraum X und zugehöriges $T \in B(X)$ existieren, so dass $\sigma(T) = \Sigma$.

Dr. Björn de Rijk
Jonas Brinker M.Sc.
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Universität Stuttgart

Aufgabe 12.4.

Seien $\mathcal{H}$ ein komplexer Hilbertraum und $T \in B(\mathcal{H})$ kompakt und normal.

(a) Beweisen Sie, dass eine Quadratwurzel $S \in B(\mathcal{H})$ von T existiert, d.h. $S^2 = T$, die kompakt und normal ist.

Hinweis: Spektralsatz für kompakte, normale Operatoren.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(i) Jede Quadratwurzel von T ist kompakt.

(ii) Jede Quadratwurzel von T ist normal.

(c) Zeigen Sie, dass der Links-Shiftoperator $T(x_1, x_2, \dots) := (x_2, x_3, \dots)$ auf ℓ^2 keine Quadratwurzel besitzt.

Aufgabe 12.5. (Bonus)

Sei $\mathcal{H}$ ein unendlichdimensionaler, seperabler Hilbertraum über $\mathbb{C}$ und seien $S, T \in B(\mathcal{H})$ kompakt und normal. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

(i) Es existiert eine ONB von $\mathcal{H}$, bestehend aus gemeinsamen Eigenvektoren von S und T.

(ii) $ST = TS$

Hinweis: Um (**ii**) $\Rightarrow$ (**i**) zu beweisen, zeigen Sie, dass die Eigenräume E_λ von S invariant unter T sind, d.h. $TE_\lambda \subset E_\lambda$.

Dieses Gruppenübungsblatt wird am **Mittwoch, den 16.1.2019** besprochen.