

Funktionalanalysis (WS 2018/19)  
Gruppenübungsblatt 12

**Aufgabe 12.1.**

Sei  $\mathcal{H}$  ein komplexer Hilbertraum und sei  $T \in K(\mathcal{H})$  ein normaler Operator. Sei außerdem  $\{e_n\}_{n \in I}$ ,  $I \subset \mathbb{N}$ , eine ONB von  $(\ker T)^\perp$ , bestehend aus Eigenvektoren zu Eigenwerten  $\{\lambda_n\}_{n \in I}$  von  $T$ , und sei  $h \in \mathcal{H}$  ein beliebiger Vektor. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

- (i) Es existiert eine Lösung  $f \in \mathcal{H}$  zu  $Tf = h$ .
- (ii)  $h \perp \ker T$  und  $\sum_{n \in I} |\lambda_n|^{-2} |(h, e_n)|^2 < \infty$ .

**Aufgabe 12.2.**

Sei  $X$  ein komplexer Banachraum und  $S, T \in B(X)$ . Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

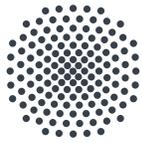
- (a) Ist  $T$  nilpotent, d.h.  $T^n = 0$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ , dann  $\sigma(T) = \{0\}$ .
- (b) Ist  $\sigma(T) = \{0\}$ , dann ist  $T$  nilpotent.
- (c) Ist  $X$  ein Hilbertraum,  $T$  selbstadjungiert und  $\|T\| \leq 1$ , dann ist  $I - T$  positiv.
- (d) Ist  $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{0\}$  abzählbar und 0 der einzige Häufungspunkt von  $\sigma(T)$ , dann ist  $T$  ein kompakter Operator.
- (e)  $\sigma(ST) \cup \{0\} = \sigma(TS) \cup \{0\}$ .

*Hinweis:* Schreiben Sie  $(I - ST)^{-1}$  für  $\|S\|, \|T\| < 1$  als geometrische Reihe und finden Sie so eine Formel für  $(I - TS)^{-1}$ .

**Aufgabe 12.3.**

Sei  $M$  ein nicht-leerer kompakter metrischer Raum und betrachte den komplexen Banachraum  $C(M, \mathbb{C})$  mit der üblichen Supremumsnorm. Wir wählen ein  $h \in C(M, \mathbb{C})$  und definieren den stetigen Multiplikationsoperator  $T: C(M, \mathbb{C}) \rightarrow C(M, \mathbb{C})$  mit  $Tf = h \cdot f$ .

- (a) Zeigen Sie, dass  $\sigma(T) = h(M)$ .
- (b) Beweisen Sie, dass  $\lambda \in \mathbb{C}$  genau dann ein Eigenwert von  $T$  ist, wenn die Niveaumenge  $\{x \in M \mid h(x) = \lambda\}$  einen inneren Punkt hat.
- (c) Sei  $\Sigma \subset \mathbb{C}$  eine beliebige kompakte, nicht-leere Menge. Zeigen Sie, dass ein komplexer Banachraum  $X$  und zugehöriges  $T \in B(X)$  existieren, so dass  $\sigma(T) = \Sigma$ .



**Aufgabe 12.4.**

Seien  $\mathcal{H}$  ein komplexer Hilbertraum und  $T \in B(\mathcal{H})$  kompakt und normal.

- (a) Beweisen Sie, dass eine Quadratwurzel  $S \in B(\mathcal{H})$  von  $T$  existiert, d.h.  $S^2 = T$ , die kompakt und normal ist.

*Hinweis:* Spektralsatz für kompakte, normale Operatoren.

- (b) Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(i) Jede Quadratwurzel von  $T$  ist kompakt.

(ii) Jede Quadratwurzel von  $T$  ist normal.

- (c) Zeigen Sie, dass der Links-Shiftoperator  $T(x_1, x_2, \dots) := (x_2, x_3, \dots)$  auf  $\ell^2$  keine Quadratwurzel besitzt.

**Aufgabe 12.5. (Bonus)**

Sei  $\mathcal{H}$  ein unendlichdimensionaler, separabler Hilbertraum über  $\mathbb{C}$  und seien  $S, T \in B(\mathcal{H})$  kompakt und normal. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

- (i) Es existiert eine ONB von  $\mathcal{H}$ , bestehend aus gemeinsamen Eigenvektoren von  $S$  und  $T$ .

- (ii)  $ST = TS$

*Hinweis:* Um (ii)  $\Rightarrow$  (i) zu beweisen, zeigen Sie, dass die Eigenräume  $E_\lambda$  von  $S$  invariant unter  $T$  sind, d.h.  $TE_\lambda \subset E_\lambda$ .