Dr. Björn de Rijk
Jonas Brinker M.Sc.
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Universität Stuttgart

Funktionalanalysis (WS 2018/19)

Gruppenübungsblatt 14

Aufgabe 14.1.

Seien $k \in \mathbb{N}$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ nicht-leer, offen und beschränkt.

(a) Zeigen Sie, dass $W_0^{k,1}(\Omega, \mathbb{F})$ stetig in $C(\overline{\Omega}, \mathbb{F})$ eingebettet ist, d.h. es existiert $C > 0$, so dass für alle $f \in W_0^{k,1}(\Omega, \mathbb{F})$[1] gilt:

(i) Es existiert $\widetilde{f} \in C(\overline{\Omega}, F)$ mit $f = \widetilde{f}$ fast überall;

(ii) $\|\widetilde{f}\|_\infty \leq C\|f\|_{k,1}$.

(b) Sei $k \geq 2$. Zeigen Sie, dass $W_0^{1,k}(B_0(1), \mathbb{F})$ *nicht* in $C(\overline{B_0(1)}, \mathbb{F})$ eingebettet ist.
Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $x \mapsto \log(\log(1 + 1/|x|))$.

Bemerkung: Die *Morrey-Ungleichung* besagt, dass für $p > k$ der Raum $W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{F})$ stetig in $C(\overline{\Omega}, \mathbb{F})$ eingebettet ist. Die Aufgabe zeigt, dass diese Einbettung im allgemeinen nicht gilt für $p = k$ (außer wenn $p = k = 1$). Die Morrey-Ungleichung kann auf beschränkten Gebieten $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ mit C^1-Rand auch für die regulären Sobolevräume $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{F})$ formuliert werden.

Aufgabe 14.2.

Seien $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ zwei unendlich dimensionale Hilberträume, so dass $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_2$ und die Einbettung $\iota\colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2\colon x \mapsto x$ kompakt ist. Wir definieren Eigenwerte und Eigenvektoren zu dieser Einbettung. Wir nennen $u \in \mathcal{H}_1 \setminus \{0\}$ Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$, falls

$$\forall\, v \in \mathcal{H}_1\colon \quad (u, v)_{\mathcal{H}_1} = \lambda(u, v)_{\mathcal{H}_2}. \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie, dass

$$\lambda_1 := \inf\left\{\frac{\|v\|_1^2}{\|v\|_2^2} \mid v \in \mathcal{H}_1 \setminus \{0\}\right\}$$

existiert und ein Eigenwert im Sinne von (1) ist.
Hinweis: Die Polarisationsformel und der Beweis zur Bestapproximation könnten hilfreich sein.

(b) Zeigen Sie, dass das folgende Iterationsverfahren Eigenwerte zu (1) konstruiert, welche durch $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots$ angeordet werden:

$$\lambda_{k+1} := \inf\left\{\frac{\|v\|_1^2}{\|v\|_2^2} \mid v \in \mathcal{H}_1 \setminus \{0\} \text{ und } (v, v_j)_{\mathcal{H}_1} = 0 \text{ für } j = 1, \ldots, k\right\},$$

wobei v_j Eigenvektoren zu den Eigenwerten λ_j sind.

(c) Beweisen Sie:

(i) Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten sind orthogonal zu einander.

(ii) Die Eigenräume $\mathrm{Sp}\{u \mid u \text{ ist Eigenvektor zu } \lambda\}$ sind endlich dimensional.

Folgern Sie $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = \infty$.

Bemerkung: Aus **(c)** folgt insbesondere, dass durch das Verfahren aus **(b)** *alle* Eigenwerte gefunden werden.

[1] Eigentlich $[f] \in W_0^{k,1}(\Omega, \mathbb{F})$, wobei $[f]$ die Äquivalenzklasse von f ist.

Universität Stuttgart

Dr. Björn de Rijk
Jonas Brinker M.Sc.
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Aufgabe 14.3.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ nicht-leer, offen und beschränkt und sei $(-\Delta)^{-1}\colon L^2(\Omega,\mathbb{C}) \to H_0^1(\Omega,\mathbb{C})$ der stetige Operator, der jedes $f \in L^2(\Omega,\mathbb{C})$ auf die zugehörige eindeutige Lösung $u \in H_0^1(\Omega,\mathbb{C})$ der schwachen Poisson-Gleichung abbildet. D.h. $(-\Delta)^{-1}f = u$ erfüllt

$$\forall\, \varphi \in H_0^1(\Omega,\mathbb{C})\colon \qquad \int_\Omega \nabla u \cdot \overline{\nabla \varphi}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f\,\overline{\varphi}\,\mathrm{d}x.$$

Wir definieren nun einen Operator $K\colon L^2(\Omega,\mathbb{F}) \to L^2(\Omega,\mathbb{C})$, indem wir $(-\Delta)^{-1}$ mit der Standardeinbettung $\iota\colon H_0^1(\Omega,\mathbb{C}) \to L^2(\Omega,\mathbb{C})$ verketten.

(a) Zeigen Sie, dass K positiv und kompakt ist.

(b) Beweisen Sie, dass das Punktspektrum $\sigma_p(K) \subset [0,\infty)$ abzählbar unendlich ist.
Hinweis: Sie können entweder Aufgabe 14.2 oder den Spektralsatz für normale kompakte Operatoren benutzen.

(c) Seien nun $k = 2$ und $\Omega = (0,1) \times (0,1)$. Berechnen Sie $\sigma_p(K)$.
Hinweis: Überlegen Sie sich wie Funktionen in $H_0^1(\Omega,\mathbb{C})$ sich als Fourierreihen aus Sinusfunktionen darstellen lassen.

Aufgabe 14.4.

Seien $1 \le p < \infty$, $m \in \mathbb{N}_0$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ offen und nicht-leer.

(a) Zeigen Sie, dass jedes $L \in (W^{m,p}(\Omega,\mathbb{F}))'$ eine Darstellung

$$\forall\, u \in W^{m,p}(\Omega,\mathbb{F})\colon \qquad L(u) = \sum_{|\alpha|\le m} \int_\Omega v_\alpha D^\alpha u\,\mathrm{d}x$$

hat mit $v_\alpha \in L^q(\Omega,\mathbb{F})$ wobei $q \in (1,\infty]$ mit $1/p + 1/q = 1$.
Bemerkung: Für $p > 1$ ist der Sobolevraum $W^{m,p}(\Omega,\mathbb{F})$ außerdem reflexiv. Warum?

(b) Der Raum $H_0^m(\Omega,\mathbb{F})$ ist ein Hilbertraum. Zeigen Sie, dass

$$(f,g)_{(m)} := \sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega D^\alpha f\,\overline{D^\alpha g}\,\mathrm{d}x$$

ein zu $(\cdot,\cdot)_m$ äquivalentes Skalarprodukt auf $H_0^m(\Omega,\mathbb{F})$ definiert. D.h. zeigen Sie, dass die zugehörigen Normen $\|\cdot\|_m$ und $\|\cdot\|_{(m)}$ äquivalent sind.
Hinweis: Erinnern Sie sich die Youngsche Ungleichung $ab \le \frac{a^2}{2\epsilon} + \frac{\epsilon b^2}{2}$ für $a,b \in \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0$.

(c) Sei das stetige Funktional $\delta'(u) := u'(0)$ auf $H_0^2((-1,1),\mathbb{F})$ gegeben. Finden Sie das eindeutige $v \in H_0^2((-1,1),\mathbb{F})$ für das $(u,v)_{(2)} = \delta'(u)$ gilt für alle $u \in H_0^2((-1,1),\mathbb{F})$.
Bemerkung: Das Funktional δ' is wohldefiniert und stetig wegen der stetigen Einbettung $H_0^2((-1,1),\mathbb{F}) \to C^1([-1,1],\mathbb{F})$ (vgl. Aufgabe 14.1).

Dieses Gruppenübungsblatt wird am **Mittwoch, den 30.1.2019** besprochen.