

Funktionalanalysis (WS 2018/19)  
Gruppenübungsblatt 15

**Aufgabe 15.1.**

Sei  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum.

- (a) Zeigen Sie, dass für  $\dim \mathcal{H} = \infty$  eine schwach konvergente Folge in  $\mathcal{H}$  existiert, die nicht bezüglich der Norm konvergent ist.
- (b) Beweisen Sie, dass für eine Folge  $\{x_n\} \subset \mathcal{H}$  und  $x \in \mathcal{H}$  gilt:

$$x_n \rightarrow x \iff x_n \rightharpoonup x \text{ und } \|x_n\| \rightarrow \|x\|.$$

- (c) Angenommen  $B \subset \mathcal{H}$  ist eine ONB. Zeigen Sie weiter, dass

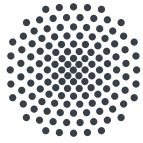
$$x_n \rightharpoonup x \iff \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\| < \infty \text{ und } \forall e \in B: (x_n, e)_{\mathcal{H}} \rightarrow (x, e)_{\mathcal{H}}.$$

**Aufgabe 15.2.**

- (a) Seien  $p \in (1, \infty)$  und  $\{\lambda_n\}$  eine reelle Folge mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = \infty$ . Beweisen Sie, dass die Folge  $\{f_n\}$  mit  $f_n(x) := e^{i\lambda_n x}$  in  $L^p((0, 1), \mathbb{F})$  schwach konvergiert.  
*Hinweis:* Benutzen Sie die dichte Teilmenge  $C_c^\infty((0, 1), \mathbb{F})$ .
- (b) Finden Sie eine schwach-\* konvergente Folge (von Folgen) in  $\ell^\infty \cong (\ell^1)'$ , die nicht schwach konvergent ist.
- (c) Zeigen Sie, dass  $c_0$  nicht schwach folgenvollständig ist, d.h. finden Sie eine Folge  $\{x_j\} \subset c_0$ , so dass  $\{\phi(x_j)\}$  für alle  $\phi \in c_0'$  eine Cauchy-Folge ist, aber es kein  $x \in c_0$  existiert mit  $\lim_{j \rightarrow \infty} \psi(x_j) = \psi(x)$  für alle  $\psi \in c_0'$ .

**Aufgabe 15.3.**

- (a) Finden Sie einen lokalkonvexen Raum  $(X, \mathcal{P})$  und eine Teilmenge  $M \subset X$ , die folgenabgeschlossen aber nicht abgeschlossen in der zugehörigen Topologie ist.
- (b) Sei nun  $Y$  ein unendlich dimensionaler, normierter Raum. Zeigen Sie, dass die schwache Topologie auf  $Y$  nicht metrisierbar ist.  
*Hinweis:* Benutzen Sie, dass schwach offene Mengen unbeschränkt oder leer sind.  
*Bemerkung:* Mit Hilfe eines ähnlichen Arguments kann gezeigt werden, dass auch die schwach-\* Topologie auf  $Y'$  nicht von einer Metrik erzeugt wird.



**Aufgabe 15.4.**

- (a) Sei  $(X, \|\cdot\|)$  ein unendlich dimensionaler, normierter Raum. Bestimmen Sie den schwachen Abschluss der Sphäre  $\{x \in X \mid \|x\| = 1\}$ .

*Hinweis:* Benutzen Sie, dass schwach offene Mengen unbeschränkt oder leer sind.

- (b) Finden sie einen Banachraum  $Y$ , eine Folge  $\{f_n\} \subset Y'$  und  $f \in Y'$ , so dass

$$f_n \xrightarrow{*} f \quad \text{aber} \quad f \notin \overline{\text{co}\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}}.$$

*Bemerkung:* Diese Aufgabe zeigt, dass man das Lemma von Mazur im Allgemeinen nicht auf schwach-\* konvergente Folgen anwenden kann.

**Aufgabe 15.5. (Bonus)**

Sei  $(X, \|\cdot\|)$  ein Banachraum.

- (a) Zeigen Sie, dass die kanonische Einbettung  $J_X: X \rightarrow X''$  schwach - schwach-\* stetig ist und  $J_X(X)$  schwach-\* dicht in  $X''$  ist.
- (b) Zeigen Sie, dass es einen kompakten hausdorffischen topologischen Raum  $(Y, \tau)$  gibt, so dass  $X$  isometrisch isomorph zu einem abgeschlossenen Unterraum von  $C(Y, \mathbb{F})$  ist.

Hierbei ist  $C(Y, \mathbb{F})$  der Raum der stetigen Funktionen  $f: Y \rightarrow \mathbb{F}$ , ausgestattet mit der Supremumsnorm.

*Hinweis:* Benutzen Sie den Satz von Alaoglu-Bourbaki.