Universität Stuttgart

Dr. Björn de Rijk
Jonas Brinker M.Sc.
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Funktionalanalysis (WS 2018/19)

Gruppenübungsblatt 15

Aufgabe 15.1.

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum.

(a) Zeigen Sie, dass für $\dim \mathcal{H} = \infty$ eine schwach konvergente Folge in $\mathcal{H}$ existiert, die nicht bezüglich der Norm konvergent ist.

(b) Beweisen Sie, dass für eine Folge $\{x_n\} \subset \mathcal{H}$ und $x \in \mathcal{H}$ gilt:

$$x_n \to x \quad \Leftrightarrow \quad x_n \rightharpoonup x \text{ und } \|x_n\| \to \|x\|.$$

(c) Angenommen $B \subset \mathcal{H}$ ist eine ONB. Zeigen Sie weiter, dass

$$x_n \rightharpoonup x \qquad \Leftrightarrow \qquad \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < \infty \text{ und } \forall\, e \in B\colon (x_n, e)_{\mathcal{H}} \to (x, e)_{\mathcal{H}}.$$

Aufgabe 15.2.

(a) Seien $p \in (1, \infty)$ und $\{\lambda_n\}$ eine reelle Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} |\lambda_n| = \infty$. Beweisen Sie, dass die Folge $\{f_n\}$ mit $f_n(x) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_n x}$ in $L^p((0,1), \mathbb{F})$ schwach konvergiert.
Hinweis: Benutzen Sie die dichte Teilmenge $C_c^\infty((0,1), \mathbb{F})$.

(b) Finden Sie eine schwach-$*$ konvergente Folge (von Folgen) in $\ell^\infty \cong (\ell^1)'$, die nicht schwach konvergent ist.

(c) Zeigen Sie, dass c_0 nicht schwach folgenvollständig ist, d.h. finden Sie eine Folge $\{x_j\} \subset c_0$, so dass $\{\phi(x_j)\}$ für alle $\phi \in c_0'$ eine Cauchy-Folge ist, aber es kein $x \in c_0$ existiert mit $\lim\limits_{j\to\infty} \psi(x_j) = \psi(x)$ für alle $\psi \in c_0'$.

Aufgabe 15.3.

(a) Finden Sie einen lokalkonvexen Raum $(X, \mathcal{P})$ und eine Teilmenge $M \subset X$, die folgenabgeschlossen aber nicht abgeschlossen in der zugehörigen Topologie ist.

(b) Sei nun Y ein unendlich dimensionaler, normierter Raum. Zeigen Sie, dass die schwache Topologie auf Y nicht metrisierbar ist.
Hinweis: Benutzen Sie, dass schwach offene Mengen unbeschränkt oder leer sind.
Bemerkung: Mit Hilfe eines ähnlichen Arguments kann gezeigt werden, dass auch die schwach-$*$ Topologie auf Y' nicht von einer Metrik erzeugt wird.

Universität Stuttgart

Dr. Björn de Rijk
Jonas Brinker M.Sc.
Insitut für Analysis, Dynamik
und Modellierung

Aufgabe 15.4.

(a) Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein unendlich dimensionaler, normierter Raum. Bestimmen Sie den schwachen Abschluss der Sphäre $\{x \in X \mid \|x\| = 1\}$.

Hinweis: Benutzen Sie, dass schwach offene Mengen unbeschränkt oder leer sind.

(b) Finden sie einen Banachraum Y, eine Folge $\{f_n\} \subset Y'$ und $f \in Y'$, so dass

$$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \quad \text{aber} \quad f \notin \overline{\operatorname{co}\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}}.$$

Bemerkung: Diese Aufgabe zeigt, dass man das Lemma von Mazur im Allgemeinen nicht auf schwach-$*$ konvergente Folgen anwenden kann.

Aufgabe 15.5. (Bonus)

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum.

(a) Zeigen Sie, dass die kanonische Einbettung $J_X : X \to X''$ schwach - schwach-$*$ stetig ist und $J_X(X)$ schwach-$*$-dicht in X'' ist.

(b) Zeigen Sie, dass es einen kompakten hausdorffschen topologischen Raum (Y, τ) gibt, so dass X isometrisch isomorph zu einem abgeschlossenen Unterraum von $C(Y, \mathbb{F})$ ist.

Hierbei ist $C(Y, \mathbb{F})$ der Raum der stetigen Funktionen $f : Y \to \mathbb{F}$, ausgestattet mit der Supremumsnorm.

Hinweis: Benutzen Sie den Satz von Alaoglu-Bourbaki.

Dieses Gruppenübungsblatt wird am **Mittwoch, den 6.2.2019** besprochen.