Universität Stuttgart

Dr. Björn de Rijk
Jonas Brinker M.Sc.
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Funktionalanalysis (WS 2018/19)

Schriftliche Aufgabe 2

Sei $(H, (\cdot,\cdot))$ ein unendlich dimensionaler Hilbertraum und $\{a_n\}$ ein Folge in H, so dass $\sum_{n=1}^{\infty} |(h, a_n)|^2 < \infty$ für jedes $h \in H$. Wir betrachten den linearen Operator $T\colon H \to \ell^2$ mit $T(h) := \{(h, a_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ und definieren $\alpha_n := \|a_n\|$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie, dass T beschränkt ist, mit $\|T\| \leq \|\{\alpha_n\}\|_2$, falls $\{\alpha_n\} \in \ell^2$.

(b) Geben Sie ein Beispiel für $\{\alpha_n\} \notin \ell^2$.

(c) Beweisen Sie, dass T auch für $\{\alpha_n\} \notin \ell^2$ beschränkt ist.

(d) Zeigen Sie, dass für jede Folge $\{\beta_n\} \in \ell^2$ die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n a_n$ in H konvergiert.

Hinweis: Zeigen Sie, dass die Folge der Partialsummen eine Cauchy-Folge in H ist.

Die Lösungen zu dieser Aufgabe sind am

Mittwoch, den 28.11.2018

in der Gruppenübung einzureichen.