Universität Stuttgart

Dr. Björn de Rijk
Jonas Brinker M.Sc.
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Funktionalanalysis (WS 2018/19)

Schriftliche Aufgabe 4

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ stets eine offene nichtleere Menge.

(a) **(1 Punkt)** Zeigen Sie, dass

$$\int_\Omega \Delta u \, \overline{\Delta v} \, \mathrm{d}x$$

ein zu $(\cdot, \cdot)_2$ äquivalentes Skalarprodukt auf $H_0^2(\Omega, \mathbb{F})$ definiert.

Hinweis: Sie können Aufgabe 14.4.b) verwenden.

(b) **(1 Punkt)** Für diese Aufgabe sei Ω beschränkt. Formulieren Sie zu $f \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{F})$ die biharmonische Gleichung

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f & \text{in } \Omega \\ \quad u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \\ \nabla\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

in eine schwache Gleichung um. D.h. finden Sie einen Hilbertraum $\mathcal{H}$ und ein Funktional $L \in \mathcal{H}'$, so dass jede Lösung $u \in C^4(\Omega; \mathbb{F}) \cap C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{F})$ von (1) auch $u \in \mathcal{H}$ und die Gleichung

$$\forall\, v \in \mathcal{H}: \quad (v, u)_{\mathcal{H}} = L(v) \tag{2}$$

erfüllt. Umgekehrt sollte jede Lösung $u \in \mathcal{H} \cap C^4(\Omega; \mathbb{F}) \cap C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{F})$ mit $u = 0$ und $\nabla u = 0$ auf $\partial\Omega$ von (2) auch (1) lösen.

Zeigen sie außerdem, dass (2) für jedes $f \in L^2(\Omega, \mathbb{F})$ eine eindeutige Lösung $u \in \mathcal{H}$ hat.

(c) **(1 Punkt)** Zeigen Sie, dass $W^{m,p}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}) = W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})$ für $p \in [1, \infty)$.

(d) **(1 Punkt)** Seien X und Y Banachräume und $T \in B(X, Y)$. Zeigen Sie, dass T auch stetig ist, wenn wir X und Y mit ihren schwachen Topologien ausstatten.

(e) **(1 Punkt)** Zeigen Sie, das für alle $p \in [1, \infty]$, $m \in \mathbb{N}_0$ die Einbettung

$$\mathcal{D}(\Omega) \to W^{m,p}(\Omega, \mathbb{F}) \colon \varphi \mapsto \varphi$$

stetig ist. Der Raum $\mathcal{D}(\Omega)$ trägt dabei eine lokalkonvexe Topologie, die durch die folgende Menge $\mathcal{P}$ von Seminormen definiert ist:

Für eine Seminorm $p \colon \mathcal{D}(\Omega) \to [0, \infty)$ gilt genau dann $p \in \mathcal{P}$, wenn für jede kompakte Menge $K \subset \Omega$ ein $N_K \in \mathbb{N}_0$ und ein $C_K > 0$ existieren mit

$$p(\varphi) \le C_K \cdot \sup\{|D^\alpha \varphi(x)| \colon x \in K, |\alpha| \le N_K\}, \quad \text{für } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),\ \operatorname{supp}\varphi \subset K.$$

Die Lösungen zu dieser Aufgabe sind am

Mittwoch, den 6.2.2019

in der Gruppenübung einzureichen.