Gruppenübung 2

Aufgabe 1 (Integration)
Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int x^3 \ln(x)\,\mathrm{d}x,$ c) $\displaystyle\int x\sin(4x)\,\mathrm{d}x,$

b) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}\,\mathrm{d}x,$ d) $\displaystyle\int \frac{\sin(2x)}{2+\sin(x)}dx.$

Aufgabe 2 (Integration II)
Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{1+\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x,$ c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan(x)}{\sqrt{\cos(x)}}\,\mathrm{d}x,$

b) $\displaystyle\int_a^b 5x^2e^{2x}\,\mathrm{d}x,$ d) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^x\sin(x)dx.$

Aufgabe 3 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und Mittelwertsatz)

a) Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $c < d$. Seien $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $g, h : [c, d] \to [a, b]$ differenzierbar und sei $I : [c, d] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$I(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Zeigen Sie, dass I differenzierbar ist. Geben Sie desweiteren eine Formel für die Ableitung von I an.

Hinweis: Drücken Sie $I(x)$ durch eine Stammfunktion von f aus.

b) Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4} \int_{x^4}^{2x^4} \cos(y^2)\mathrm{d}y.$$

Aufgabe 4 (Riemann-Integrierbarkeit)
Gegeben seien $M = \{\frac{1}{m} : m \in \mathbb{N}\}$ und $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \setminus M, \\ 2 - x, & x \in M. \end{cases}$$

Untersuchen Sie, ob f Riemann-integrierbar auf $[0,1]$ ist, und berechnen Sie im Falle der Riemann-Integrierbarkeit das Integral

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 5 [**Schriftliche Aufgabe 6 Punkte**]

a) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$i) \qquad \int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,\mathrm{d}x, \qquad\qquad ii) \qquad \int \ln^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

b) Sei $a > 0$ und seien $u, v\colon [-a,a] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Dabei sei u eine gerade Funktion, d.h. es gilt $u(-x) = u(x)$ für alle $x \in [-a,a]$ und v eine ungerade Funktion, d.h. $v(-x) = -v(x)$ für alle $x \in [-a,a]$. Zeigen Sie, dass

$$\int_{-a}^{a} u(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a u(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_{-a}^{a} v(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$