Prof. Dr. G. Schneider, Dr. B. de Rijk,
Nicole Gauß M.Sc., Daniela Maier M.Sc.

Gruppenübung 3

Aufgabe 1 (Substitutionsregel rückwärts)

a) Begründen Sie, dass der Flächeninhalt eines Kreises mit Radius $r > 0$ durch das Integral

$$\int_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2 - x^2}\mathrm{d}x,$$

gegeben ist und bestimmen Sie das Integral mithilfe der Substitution $x = r\sin(u)$.

b) Sei $a > 0$ und $f\colon [0,a] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$. Die Länge der Kurve f im Intervall $[0,a]$ ist durch das Integral

$$\int_{0}^{a} \sqrt{1 + 4x^2}\mathrm{d}x,$$

gegeben. Bestimmen Sie das Integral mithilfe der Substitution $x = \frac{1}{2}\sinh(u)$.

Aufgabe 2 (Integration rationaler Funktionen I)
Berechnen Sie die folgenden Integrale mithilfe der Partialbruchzerlegung.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+2)}\mathrm{d}x,$ *b)* $\displaystyle\int \frac{8}{(4-x^2)(4+x^2)}\mathrm{d}x$ für $x > 2$.

Aufgabe 3 (Uneigentliche Integrale)

a) Untersuchen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale konvergieren und berechnen Sie gegebenenfalls deren Werte.

i) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{(1-x)^2}\mathrm{d}x,$ *ii)* $\displaystyle\int_0^1 x\ln(x)\mathrm{d}x.$

b) Untersuchen Sie die folgenden Integrale auf Konvergenz.

i) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\mathrm{d}x,$ *ii)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x.$

Hinweis: Verwenden Sie die Konvergenzkriterien für uneigentliche Integrale.

Aufgabe 4 (Integration rationaler Funktionen II)
Berechnen Sie die folgenden Integrale mithilfe der Partialbruchzerlegung.

$$a) \quad \int_2^3 \frac{1}{x(x-1)^2}\mathrm{d}x, \qquad b) \quad \int \frac{5-5x-6x^2+3x^3+3x^4}{(x^2-1)(x-1)}\mathrm{d}x \quad \text{für } x>1.$$

Aufgabe 5 [**Schriftliche Aufgabe 6 Punkte**]

a) Berechnen Sie die folgenden Integrale mithilfe der Partialbruchzerlegung.

$$i) \quad \int_1^2 \frac{x^2-1}{x^3+2x^2}\mathrm{d}x, \qquad ii) \quad \int \frac{3x+3}{x^3-1}\mathrm{d}x \quad \text{für } x>1.$$

b) Untersuchen Sie die folgenden Integrale auf Konvergenz.

$$i) \quad \int_{\frac{\pi}{4}}^{\infty} \frac{\cos x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x, \qquad ii) \quad \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x|\sin x|}\mathrm{d}x.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Konvergenzkriterien für uneigentliche Integrale.